O 2009

माध्यमिक शिक्षा मण्डल, मध्यप्रदेश, भोपाल

मु.उ.पु. 40 पृष्ठ

कार्यालयीन उपयोग के लिए

परीक्षा के नाम की सील: हा. से. स्कूल रेगु. परीक्षा

केन्द्र क्रमांक की सील: 681009

निम्न रिक्तियों की सही प्रविष्टि परीक्षार्थी द्वारा की जाए।

1. विषय कोड 150 परीक्षा का विषय गणित

2. परीक्षा का माध्यम हिन्दी परीक्षा की दिनांक 24-03-09

3. परीक्षार्थी प्रश्न पत्र का पूर्ण कोड नम्बर (सेट A, B, C,या D) अनिवार्यतः भरें — कोड U-2045 सेट D

स्टीकर तीर के निशान से मिलाकर लगायें

सरल क्रमांक K

4. परीक्षार्थी का अनुक्रमांक (अंग्रेजी अंकों में)

2	3	6	8	1	6	2	5	4

5. नीचे दिये प्रत्येक कालम में ऊपर दिये गये अनुक्रमांक के अंकों [illegible] उसी क्रम में शब्दों में लिखा जाए :–

[illegible]

पर्यवेक्षक/केन्द्राध्यक्ष का प्रमाणीकरण

प्रमाणित किया जाता है कि परीक्षार्थी द्वारा निम्नानुसार पूरक उत्तरपुस्तिका ली गई है :–

क :– संख्या शब्दों में X अंकों में X

ख :– परीक्षार्थी की बैठक व्यवस्था कक्ष क्रमांक 03 में है।

ग :– उत्तर पुस्तिका पर प्रश्न–पत्र का कोड नम्बर एवं सेट सही लिखा है।

हस्ताक्षर (पर्यवेक्षक) [illegible]

नाम [illegible] पद उ.शि.

पता/संस्था [illegible]

परीक्षार्थी द्वारा ली गई सभी पूरक उत्तर पुस्तिकायें, मुख्य उत्तर पुस्तिका के साथ संलग्न हैं।

हस्ताक्षर केन्द्राध्यक्ष

BSEMP

1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	
8	
9	
10	
कुल प्राप्त	

परीक्षार्थी, परीक्षक से अपेक्षा है कि वे पृष्ठ भाग पर दिये गये निर्देशों का यथेष्ट पालन सुनिश्चित करेंगे।

प्रमाणित किया जाता है कि उपरोक्तानुसार संलग्न पूरक उत्तर पुस्तिकाओं चस्पा स्थिति में यथावत् रखते हुए ही उत्तरपुस्तिका का मूल्यांकन किया गय पुस्तिका के अन्दर के अंक एवं कव्हर पृष्ठ पर दर्शाये अंक एक समान है

हस्ताक्षर (परीक्षक) [illegible]

परीक्षक क्रमांक 734/57

हस्ताक्षर (उपमुख्य परीक्ष

दिनांक.....

दिनांक.....

परीक्षार्थी के लिए निर्देश

1. परीक्षार्थी को अपना अनुक्रमांक/विषय/माध्यम/दिनांक एवं प्रश्न–पत्र का कोड (समूह) मुख पृष्ठ पर अंकित करना अनिवार्य है। अन्यत्र कहीं भी नहीं लिखा जाएगा।
2. अनुक्रमांक नीचे दिये गए उदाहरण अनुसार लिखा जाए :–

1	8	2	4	3	9	5	6	8
एक	आठ	दो	चार	तीन	नौ	पाँच	छः	आठ

3. उत्तर पुस्तिका के दोनों ओर पृष्ठों में लिखें। बीच में रिक्त स्थान न छोड़ें। भूल से छूटा/रिक्त स्थान तथा शेष खाली पृष्ठों को क्रास किया जाए।
4. परीक्षार्थी प्रश्न पत्र हल करते समय ही, कव्हर पृष्ठ पर दी गई तालिका में प्रश्न क्रमांक के सम्मुख वाले कालम में उत्तरपुस्तिका का वह पृष्ठ क्रमांक अनिवार्य रूप से अंकित करें जिस पर प्रश्न का उत्तर लिखा गया है। यदि पूरक उत्तरपुस्तिका का उपयोग किया गया हो, तो उस पर 41 से प्रारंभ करते हुए पृष्ठ क्रमांक परीक्षार्थी द्वारा स्वयं डाले जाएँ।

परीक्षक के लिए निर्देश

1. केवल उन्हीं उत्तरपुस्तिकाओं का मूल्यांकन करें जिन पर होलो क्राफ्ट स्टीकर चस्पा है।
2. उत्तरपुस्तिका का मूल्यांकन होलो क्राफ्ट स्टीकर को चस्पा स्थिति में यथावत् रखते हुए ही किया जाये।
3. बिना होलो क्राफ्ट स्टीकर वाली तथा फटे हुए होलो क्राफ्ट स्टीकर वाली सभी उत्तरपुस्तिकाऐं मूल्यांकन हेतु परीक्षा नियंत्रक, माध्यमिक शिक्षा मण्डल, मध्यप्रदेश, भोपाल को व्यक्तिशः रूप से भेजी जाये।

मूल्यांकन केन्द्र के लिए निर्देश

1. **O.M.R. SHEET** पर प्राप्तांक की प्रविष्टि करने हेतु केवल वही उत्तरपुस्तिकाएँ प्राप्त करें, जिनका मूल्यांकन होलो क्राफ्ट स्टीकर को चस्पा स्थिति में यथावत् रखते हुए ही किया गया है। यदि होलो क्राफ्ट स्टीकर फटा हुआ पाया जाता है तो ऐसी उत्तरपुस्तिकाऐं मूल्यांकन केन्द्र अधिकारी को पृथक से सौपी जाएँ। ऐसे प्रकरणों के प्राप्तांकों की प्रविष्टि **O.M.R. SHEET** में नहीं की जाए। मूल्यांकन केन्द्र अधिकारी ऐसी उत्तरपुस्तिकाऐं पुनः मूल्यांकन के लिये परीक्षा नियंत्रक, माध्यमिक शिक्षा मण्डल, मध्यप्रदेश, भोपाल को व्यक्तिशः रूप से सौपेंगे।
2. उत्तरपुस्तिका के मुख्य पृष्ठ में अंकों एवं शब्दों में अंकित प्राप्तांकों को मिलान कर **O.M.R. SHEET** में अंकों की सटीक प्रविष्टि करें।
3. **O.M.R. SHEET** पर प्रमाणीकरण कर हस्ताक्षर करें।

BSEM

प्रश्न 3 (अ) उत्तर → 4 (सही विकल्प)

(अ). ⇒ (i). $A = \frac{1}{2}$, $B = \frac{1}{2}$

(ब). ⇒ (ii) $\frac{\pi}{4}$ ✓

(स) ⇒ (i) $\frac{-1}{9}$ cm/Second ✓

(द) ⇒ (iv) −1 व +1 के बीच ✓

(इ) ⇒ (i) +0.4 ✓

उत्तर → 2

(अ). (ii) 60° ✓

(ब). (ii) $\frac{\hat{i}}{\sqrt{2}} + \frac{\hat{j}}{\sqrt{2}}$ ✓

(क्र.प.क्र.)

(य). (ii) $\frac{1}{x \log x \log(\log x)}$

(द) (ii) $\cos x$

(ङ). (i) $0.0033E-12$

उत्तर → 3 (सही जोड़ी)

(अ)	(ब)
(अ) मूल बिन्दु से समतल $3x-3y+6z=17$ की दूरी होगी	$\frac{17}{7}$
(ब) यदि $\vec{a}=2i-3j+5k$ तथा $\vec{b}=-2i+2j+2k$ हो तो $\vec{a}\cdot\vec{b}$ का मान होगा	0
(स) $\frac{d}{dx}\tan x$	$\sec^2 x$
(द) $\int \frac{dx}{\tan x+\cot x}$ का मान	$\frac{\cos 2x}{4}$

BSEMP

(5) [ ] + [ ] = [ ]

5 पृष्ठ 5 के अंक — कुल अंक

(3) $\cdot 4326E05 \div \cdot 3512E-02$ का मान है।

0.1251 E08

उत्तर → 4 (सत्य व असत्य)

(i). ⇒ सत्य ✓

(ii). ⇒ असत्य ✓

(iii) ⇒ सत्य ✗

(iv) ⇒ असत्य ✓

(v) ⇒ सत्य ✓

(2.5 क)

BSEMP

BSEMP

उत्तर → 5

(i) समतल का समीकरण $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = \frac{1}{(\text{एक})}$ होता है।

(ii) एक सदिश $\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$ की दिशा में इकाई सदिश है। इसकी दिक्कोज्याएँ $\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}$ होती हैं।

(iii) $\int \sec^2(ax+b)\,dx$ का मान $\frac{\tan(ax+b)}{a}$ होता है।

(iv) सिम्पसन नियम से $\int_1^7 \frac{dx}{x}$ का मान

$= 12.28$ (लगभग)

(v) ट्रेपेजोइडल नियम $\int_a^b y\,dx$

$\frac{h}{2}\left[y_0 + y_n + 2(y_1 + y_2 + \dots + y_{n-1})\right]$

जहाँ $h = \frac{b-a}{n}$, y_0 = प्रथम पद, y_n = अंतिम पद

पृष्ठ के अंक योग

BSEMP

1
पृष्ठ के अंकों का योग

प्रश्न 3 (ब)

उत्तर → 6 (अथवा)

दिया है :-

$$= \frac{1}{x(x+b)}$$

तब माना कि

$$\frac{1}{x(x+b)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{(x+b)} \quad (1)$$

$$= \frac{1}{x(x+b)} = \frac{A(x+b)+Bx}{x(x+b)}$$

$$= 1 = A(x+b)+Bx \quad (11)$$

समी. (11) से $-x$, तथा अपर राशि के गुणांकों की तुलना करने पर

$$A+B=0$$
$$bA+0B=1$$

वज्र गुणन विधि से $\frac{A}{1-0} = \frac{B}{0-1} = \frac{-1}{0-b}$

$$\frac{A}{1} = \frac{B}{-1} = \frac{-1}{-b}$$

(क्रमशः)

$$\frac{A}{1} - \frac{B}{-1} = \frac{1}{6}$$

$\Rightarrow \boxed{A = \frac{1}{6}}$ तथा $\boxed{B = -\frac{1}{6}}$

समीकरण (1) में रखने पर

$$\frac{1}{x(x+6)} = \frac{1}{6(x)} - \frac{1}{6(x+6)}$$

अतः अभीष्ट आंशिक भिन्न होगी

$$\frac{1}{6x} - \frac{1}{6(x+6)}$$

$\therefore$ उत्तर

उत्तर → 7

दिया है :—

$$\tan^{-1}\left(\frac{1}{7}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{1}{13}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{2}{9}\right)$$

अब

$$LHS = \tan^{-1}\left(\frac{1}{7}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{1}{13}\right)$$

सूत्र $\tan^{-1}(x) + \tan^{-1}(y) = \tan^{-1}\left(\frac{x+y}{1-xy}\right)$

पृष्ठ के अंकों का योग

BEMP

⑨ [ ] + [ ] = [1]

प्रश्न ५ का अंक — अंक

BSEMP

पृष्ठ का अंक

2) $\tan^{-1}\left[\frac{\frac{1}{7}+\frac{1}{13}}{1-\left(\frac{1}{7}\right)\left(\frac{1}{13}\right)}\right]$

$\tan^{-1}\left[\frac{\frac{13+7}{13\times7}}{\frac{91-1}{13\times7}}\right]$

$\tan^{-1}\left[\frac{20}{13\times7}\times\frac{13\times7}{90}\right]$

$\tan^{-1}\left[\frac{20}{90}\right]$

$= \tan^{-1}\left[\frac{2}{9}\right]$ = RHS

$\Rightarrow$ LHS = RHS

यही सिद्ध करना था।

BSEMP

उत्तर → 8

दिया है $y = e^x$ तब अवकल गुणांक होगा।

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(e^x) \quad \text{---} (1)$$

अब माना

$$f(x) = e^x$$

$$f(x+h) = e^{x+h}$$

तब प्रथम सिद्धान्त से अवकल गुणांक होगा।

$$\frac{d}{dx}(e^x) = \frac{d}{dx}[f(x)]$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{e^{x+h} - e^x}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{e^x \cdot e^h - e^x}{h}$$

$= \lim_{h \to 0} \frac{e^x (e^h - 1)}{h}$

$= e^x \lim_{h \to 0} \left(\frac{e^h - 1}{h} \right)$

{ श्रृंखला से
$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{\lfloor 2} + \frac{x^3}{\lfloor 3} + \cdots$

$= e^x \lim_{h \to 0} \left(\frac{1 + h + \frac{h^2}{\lfloor 2} + \frac{h^3}{\lfloor 3} + \cdots - 1}{h} \right)$

$= e^x \lim_{h \to 0} \left(\frac{h + \frac{h^2}{\lfloor 2} + \frac{h^3}{\lfloor 3} + \cdots}{h} \right)$

$= e^x \lim_{h \to 0} \frac{h \left(1 + \frac{h}{\lfloor 2} + \frac{h^2}{\lfloor 3} + \cdots \right)}{h}$

$= e^x \lim_{h \to 0} \left(1 + \frac{h}{\lfloor 2} + \frac{h^2}{\lfloor 3} + \cdots \right)$

$(h = 0)$ रखने पर

$= e^x (1) = e^x$

BSEMP

पृष्ठ के अंक यहां भरें

BSEMP

अब $\frac{dy}{dx} = ex$

6 उत्तर

उत्तर → 3

दिया है $y = x^2 \log x$ — (1)

अब समी. (1) का x के सापेक्ष अवकलन करने पर

$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(x^2 \log x)$

सूत्र $\frac{d}{dx}(uv) = \left(u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}\right)$ से

$\frac{dy}{dx} = x^2 \times \frac{1}{x} + \log x (2x)$

$\frac{dy}{dx} = x + 2x \log x$

पुनः अवकलन करने पर

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}(x) + \frac{d}{dx}(2x\log x)$$

$$\left\{\because \frac{d}{dx}(x) = 1\right\}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 1 + 2\left[x \times \frac{1}{x} + \log x \times 1\right]$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 1 + 2[1 + \log x]$$

पुनः अवकलन करने पर

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{d}{dx}(1) + 2\frac{d}{dx}(1 + \log x)$$

$$\left\{\because \frac{d}{dx}(c) = 0\right\}$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = 0 + 2\left(0 + \frac{1}{x}\right)$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{2}{x}$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = 2(x)^{-1}$$

(शेष अगले पृष्ठ पर)

BSEMP

[/]
पृष्ठ के अंकों का योग

FSEMP

x के सापेक्ष अवकलन

$$\frac{d^4y}{dx^4} = 2\frac{d}{dx}(x)^{-1}$$

$$\left\{\because \frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}\right\}$$

$$\frac{d^4y}{dx^4} = 2(-1)x^{-1-1}$$

$$\frac{d^4y}{dx^4} = \frac{-2}{x^2}$$ यही सिद्ध करना था

उत्तर → 10 (अथवा)

दिया है :-

कण की दूरी $(s) = ae^t + \frac{b}{e^t}$ ①

यहाँ पर t = समय सेकण्ड में

अब t के सापेक्ष अवकलन करने पर

$$\frac{d}{dt}(s) = \frac{d}{dt}(ae^t + be^{-t})$$

$$\left\{\because \text{कण का वेग}(v) = \frac{ds}{dt}\right\}$$

$$v = ae^t + b(-1)(e^{-t})$$

$v = ae^t - be^{-t}$ (मीटर/सेकण्ड)

$\left\{ \text{सूत} \frac{d}{dt}(et) = e^t \right\}$

→ उपरोक्त t के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$\frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}(ae^t - be^{-t})$

$\left(\text{सूत} \frac{dv}{dt} = \text{कण का त्वरण} \right)$

त्वरण $= ae^t - b(-1)e^{-t}$

त्वरण $= ae^t + be^{-t}$ (मीटर/सेकण्ड²)

त्वरण $= \frac{1}{e^t} + \frac{b}{e^t}$ — (ii)

समी. (i) व (ii) से स्पष्ट है कि

कण के त्वरण का धनात्मक मान = कण की दिशा (t सेकण्ड में)

यही सिद्ध करना था।

पृष्ठ के ... का शेष

BSEMP

BSEMP

उदाहरण 11

दिया है :-

पति की आयु (x)	पत्नि की आयु (y)	$dx' = (x-43)$	$dy = (y-32)$	$dx\,dy$	dx^2	dy^2
35	32	-8	0	0	64	0
34	30	-9	-2	18	81	4
40	31	-3	-1	3	9	1
[43]	[32]	0	0	0	0	0
56	53	+13	21	273	169	441
20	20	+23	-12	276	529	144
38	30	+5	-2	10	25	4
		$\Sigma = -35$	$\Sigma = 4$	$\Sigma = 580$	$\Sigma 877$	$\Sigma 594$

यहाँ पर $n = 7$

अब सहसंबंध गुणांक ज्ञात करने के लिये

$$r = \frac{n\Sigma dx\,dy - \Sigma dx\,\Sigma dy}{\sqrt{n\Sigma dx^2 - (\Sigma dx)^2}\sqrt{n\Sigma dy^2 - (\Sigma dy)^2}}$$

$$r = \frac{7\times 580 - (-35)(4)}{\sqrt{7\times 877 - (-35)^2}\sqrt{7\times 594 - (4)^2}}$$

[/]
पृष्ठ के अंकों का योग

(17) योग. ठ + पृष्ठ के अंक = कु. अंक

$$r = \frac{4060 + 140}{\sqrt{6139 - 1225}\sqrt{4158 - 16}}$$

$$r = \frac{4200}{\sqrt{4914}\sqrt{4142}}$$

$$r = \frac{4200}{\sqrt{4914}\sqrt{4142}}$$

$$r = \frac{4200}{70.8 \times 64.3}$$

$$r = \frac{4200}{708 \times 643} \quad \frac{4200}{455244}$$

$r = 0.89$ (लगभग)

या $\boxed{r = 0.9}$

(लगभग)

(सहसम्बन्ध गुणांक) ← 0 और

BSEMP

पृष्ठ के अंकों का योग

BSEMP

उत्तर → 2 (अथवा)

दिया है :-

(i) समाश्रयण रेखाओं के बीच का कोण $= \theta$

(ii) समाश्रयण गुणांक $b_{yx} = 1.6$

$b_{xy} = 0.4$

हल :-

हम जानते हैं कि दो समाश्रयण रेखाओं के बीच का कोण θ हो तो

$$\tan\theta = \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}$$ से

$$\tan\theta = \frac{b_{xy} - \frac{1}{b_{yx}}}{1 + (b_{xy})\left(\frac{1}{b_{yx}}\right)}$$

$\therefore$

$$\tan\theta = \frac{(0.4) - \frac{1}{(1.6)}}{1 + (0.4)\left(\frac{1}{1.6}\right)}$$

[/]
पृष्ठ के अंकों का योग

BSEMP

$$\tan\theta = \frac{(0.4)(1.6)-1}{(1.6)}$$

$$\frac{1.6+0.4}{(1.6)}$$

$$\tan\theta = \frac{(0.4)(1.6)-1}{1.6} \times \frac{1.6}{(1.6+0.4)}$$

$$\tan\theta = \frac{(0.4)(1.6)-1}{(1.6+0.4)}$$

$$\frac{0.64-1}{2.0}$$

$$\frac{-0.36}{2}$$

$$= -0.18$$

$$\text{या दूसरे } \tan\theta = \left|\frac{b_2 - b_1}{1+(b_1)(b_2)}\right|$$

$$\text{या } \tan\theta = |-0.18|$$

[ ]
पृष्ठ के अंक

BSEMP

$\Rightarrow \tan\theta = 0.18$

$\therefore 3$ लगभग

उत्तर → 13

दिया है :- बिन्दु $P(-1, 3, 2)$

समतल $= x + 2y + 2z = 5$

तथा

समतल $= 3x + 3y + 2z = 8$

हल :- किसी बिन्दु (x, y, z) से जाने वाले तल समतल का समी० होता है :-

$A(x - x_1) + B(y - y_1) + C(z - z_1) = 0$

यह $P(-1, 3, 2)$ से होकर जाता है।

तब समतल का समी० होगा :-

$A(x + 1) + B(y - 3) + C(z - 2) = 0$ ①

यहाँ पर A, B, C समतल के अभिलम्ब के दिक् अनुपात हैं।

पृष्ठ के अंकों का योग

BSEMP

अब समतल $x+2y+2z=5$ के अभिलम्ब के दिक् अनुपात $(1, 2, 2)$ हैं।

तथा समतल $3x+3y+2z=8$ के अभिलम्ब के दिक् अनुपात $(3, 3, 2)$ हैं।

अब प्रश्नानुसार अभीष्ट समतल दिये गये समतलों पर लम्ब है।

तब लम्ब की शर्त $a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2=0$ से

$\Rightarrow A(1)+B(2)+C(2)=0$

$A+2B+2C=0$ ——— (i)

तथा $A(3)+B(3)+C(2)=0$

$3A+3B+2C=0$ ——— (ii)

समी. (i) व (ii) से

$A+2B+2C=0$

$3A+3B+2C=0$ वज्र गुणन विधि से

$$\frac{A}{4-6}=\frac{B}{6-2}=\frac{C}{3-6}$$

$$\frac{A}{-2}=\frac{B}{4}=\frac{C}{-3}=K \text{ (माना)}$$ हल,

पृष्ठ के अंकों का योग

$(A = -2K)$

$(B = 4K)$

$(C = -3K)$ ये मान समी० (1) में रखने पर

$(-2K)(x+1) + (4K)(y-3) + (-3K)(z-2) = 0$

समी० में $(-K)$ से भाग देने पर

$2(x+1) - 4(y-3) + 3(z-2) = 0$

$2x - 4y + 3z + 2 + 12 - 6 = 0$

$$2x - 4y + 3z + 8 = 0$$

यही समतल का अभीष्ट समी० है।

उत्तर → (B) 14

दिया है $\vec{a} = \hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}$

$\vec{b} = 3\hat{i} + \hat{j} - 5\hat{k}$

BSEMP

तब सदिश $\vec{a}-\vec{b}$ होगा।

$(\vec{a}-\vec{b}) = (i+2\hat{j}-\hat{k}) - (3\hat{i}+\hat{j}-5\hat{k})$

$= i-3\hat{i}+2\hat{j}-\hat{j}-k+5\hat{k}$

$= -2\hat{i}+\hat{j}+4\hat{k}$

तथा

$|\vec{a}-\vec{b}| = \sqrt{(-2)^2+(1)^2+(4)^2}$

$|\vec{a}-\vec{b}| = \sqrt{4+1+16}$

$|\vec{a}-\vec{b}| = \sqrt{21}$

तब $(\vec{a}-\vec{b})$ की दिशा में इकाई सदिश

चूंकि $\hat{a} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$ से

इकाई सदिश $= \frac{-2\hat{i}+\hat{j}+4k}{\sqrt{21}}$

इकाई सदिश $= \frac{-2}{\sqrt{21}}\hat{i} + \frac{1}{\sqrt{21}}\hat{j} + \frac{4}{\sqrt{21}}\hat{k}$

उत्तर

पृष्ठ 24 के अंक | कुल अंक

BSEMP

उत्तर 15 (अथवा)

दिया है :-

$$= \lim_{x \to 1} \frac{x^3 - 1}{(x^2 - 1)}$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{x^3 - (1)^3}{[x^2 - (1)^2]}$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{x^3 - (1)^3}{(x+1)(x-1)}$$

सूत्र $x^2 - a^2 = (x+a)(x-a)$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{x^3 - (1)^3}{(x-1)} \times \frac{1}{(x+1)}$$

अब सूत्र से

$$\left\{ \lim_{x \to a} \frac{x^n - a^n}{x - a} = n a^{n-1} \right.$$

$$= 3(1)^{3-1} \lim_{x \to 1} \frac{1}{(x+1)}$$

$$= 3(1)^2 \times \frac{1}{(1+1)}$$

पृष्ठ को अंकों का योग

$= \frac{3 \times 1}{2}$

$= 3/2$

उत्तर

उत्तर ≥ 16 (अथवा)

दिया है कि

$$I = \int \frac{1+\tan x}{x + \log \sec x} dx$$

अब माना कि — (1)

$x + \log \sec x = t$ तब x के सापेक्ष अवकलन करने पर

$$\frac{dx}{dx} + \frac{1}{\sec x} \times \sec x \tan x = \frac{dt}{dx}$$

$$1 + \tan x = \frac{dt}{dx}$$

$$(1+\tan x)\, dx = dt$$

अब ये मान समी. (1) में रखने पर

B S E M P

पृष्ठ के अंकों का योग

$I = \int \frac{dt}{t}$ सूत्र $\int \frac{1}{x} dx = \log_e x$

$I = \log(t) + c$ यहाँ एक अचर राशि है।

t का मान रखने पर

$I = \log(x + \log \sec x) + c$

$\therefore$ उत्तर

उत्तर → 17 (अंक)

दिया है :-

$I = \int \sin^4 x \cos^3 x \, dx$

$I = \int \sin^4 x \cos^2 x \cos x \, dx$

$I = \int \sin^4 x (1 - \sin^2 x) \cos x \, dx$ — (1)

B
C
E
M
P

पृष्ठ के अंकों का योग

BSEMP

(चूंकि $\cos 2x = 1 - \sin^2 x$)

अब माना कि $\sin x = t$ x के सापेक्ष अवकलन करने पर

$$\cos x = \frac{dt}{dx}$$

$$\cos x\, dx = dt$$ ये मान समी (1) में रखने पर

$$I = \int \sin^4 x \cos x\, dx$$

$$I = \int (t)^4 (1 - t^2)\, dt$$

$$I = \int (t^4 - t^6)\, dt$$

$$I = \int t^4\, dt - \int t^6\, dt$$

{चूंकि $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}$}

पृष्ठ के अंक कार्यालय

$$I = \frac{t^{4+1}}{4+1} - \frac{t^{6+1}}{6+1} + c$$

यहाँ पर c एक अचर राशि है।

$$I = \frac{t^5}{5} - \frac{t^6}{6} + c$$

$$I = \frac{t^5}{5} - \frac{t^7}{7} + c$$

t का मान रखने पर

$$I = \frac{(\sin x)^5}{5} - \frac{(\sin x)^7}{7} + c$$

$$I = \frac{7\sin^5 x - 5\sin^7 x}{35} + c$$

उत्तर

BSEMP

BSEMP

उत्तर → 18

दिया है ∴ समीकरण $\frac{d^2y}{dx^2} + 9y = 0$

तब सिद्ध करना कि इस समीकरण का हल

$y = 4\sin 3x$ है। ——— (1)

तब

$y = 4\sin 3x$ से

x के सापेक्ष

अवकलन करने पर

$\frac{dy}{dx} = 4 \frac{d}{dx}(\sin 3x)$

$\left[\frac{d}{dx}\sin x = \cos x\right]$

$\frac{dy}{dx} = 4\cos 3x\,(3)$

$\frac{dy}{dx} = 12\cos 3x$ ——— (ii)

पुनः x के सापेक्ष

अवकलन करने पर

$\frac{d^2y}{dx^2} = 12 \frac{d}{dx}(\cos 3x)$ ———

हल करें.

पृष्ठ के अंकों का योग

$\left\{\text{चूंकि } \frac{d}{dx}\cos x = -\sin x\right\}$

अब

$\frac{d^2y}{dx^2} = 12(-\sin 3x)(3)$

$\frac{d^2y}{dx^2} = -12 \times 3 \sin 3x$

$\frac{d^2y}{dx^2} = -9 \times 4 \sin 3x$

समी① से

$4\sin 3x = y$

रखने पर

$\frac{d^2y}{dx^2} = -9y$

अब पक्षान्तरण करने पर

$$\boxed{\frac{d^2y}{dx^2} + 9y = 0}$$

यही हमें अवकलन समीकरण दिया है।

BSEMP

पृष्ठ के अंकों का योग

अतः इससे सिद्ध हुआ कि दिये गये समीकरण

$\frac{d^2y}{dx^2} + 9y = 0$ का,

हल $y = 4\sin 3x$ है।

यही सिद्ध करना था।

उत्तर → (b)

(i)

52 पत्तों की फेंटी हुई ताश की गड्डी से 2 पत्ते निकाले जाते हैं।

तब 52 पत्तों में से 2 पत्ते निकालने के कुल प्रकार होंगे

$n(S) = {}^{52}C_2$

(ii) तथा, ताश की गड्डी में 26 लाल पत्ते होते हैं। अतः 26 लाल पत्तों में से 2 पत्ते निकालने के प्रकार

$n(A) = {}^{26}C_2$

BSEMP

पृष्ठ के अंकों का योग

ताश की गड्डी में चारों में से 2 पत्ते निकालने के प्रकार $= {}^{4}C_2$

$n(B) = {}^{4}C_2$

अब चूंकि इन लाल पत्तों में 2 इक्के भी शामिल हैं तब इसके अर्थात् इनके उभयनिष्ठ के प्रकार होंगे,

$n(A \cap B) = {}^{2}C_2$

तब

लाल या इक्के होने की प्रायिकता होगी

$$\frac{n(A \cup B)}{n(S)} = \frac{n(A)}{n(S)} + \frac{n(B)}{n(S)} - \frac{n(A \cap B)}{n(S)}$$

तब प्रायिकता होगी :-

$P = \frac{n}{S}$ से

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$P(\text{लाल या इक्का}) = \frac{{}^{2}C_2}{{}^{52}C_2} + \frac{{}^{4}C_2}{{}^{52}C_2} - \frac{{}^{2}C_2}{{}^{52}C_2}$$

पृष्ठ के अंकों का योग

BSEMP

$\frac{26\times25}{2\times1} + \frac{4\times3}{2\times1} \quad \frac{2\times2}{2\times2}$

$= {}^{52}C_2$

$13\times25+6-1$

$= {}^{52}C_2$

$13\times25+5$

$= {}^{52}C_2$

$25+5$

$= \frac{52\times51}{2\times1}$

330×2

$= \frac{52\times51}{}$

55

$= 221$

अतः लालयां इक्का होने की प्रायिकता होगी

$\frac{55}{221}$

उत्तर

BSEMP

पृष्ठ के अंकों का योग

BSEMP

उत्तर → २०

दिया है :-

(i) पहली रेखा

$x = ay + b$, $z = cy + d$

(ii) दूसरी रेखा

$x = a'y + b'$, $z = c'y + d'$

तब पहली रेखा होगी

$x = ay + b$, $z = cy + d$ से

$$\frac{x-b}{a} = \frac{y}{1} \quad , \quad \frac{z-d}{c} = \frac{y}{1}$$

अर्थात

$$\frac{x-b}{a} = \frac{y}{1} = \frac{z-d}{c} \quad \text{---(1)}$$

तथा दूसरी रेखा होगी

$x = a'y + b'$, $z = c'y + d'$

$$\frac{x-b'}{a'} = \frac{y}{1} \quad , \quad \frac{z-d'}{c'} = \frac{y}{1}$$

⇒

BSEMP

$$\frac{x-b'}{a'} = \frac{y}{1} = \frac{z-c'}{c'} \quad \text{---(II)}$$

रेखा (I) के अभिलम्ब के दिक् अनुपात हैं :- $(a, 1, c)$

रेखा (II) के अभिलम्ब के दिक् अनुपात हैं :- $(a', 1, c')$

अब यदि ये रेखाएँ परस्पर लम्बवत् होगी तो लम्ब की शर्त से

$a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 = 0$ यहाँ पर $(a_1, b_1, c_1$ पहली रेखा तथा $(a_2, b_2, c_2$ दूसरी रेखा के दिक् अनुपात हैं। तब अभीष्ट शर्त होगी

$$(a)(a') + (1)(1) + (c)(c') = 0$$

$$aa' + 1 + cc' = 0$$

$$\boxed{aa' + cc' + 1 = 0}$$

यही शर्त हमें दी गयी है। अतः यह सिद्ध हुआ

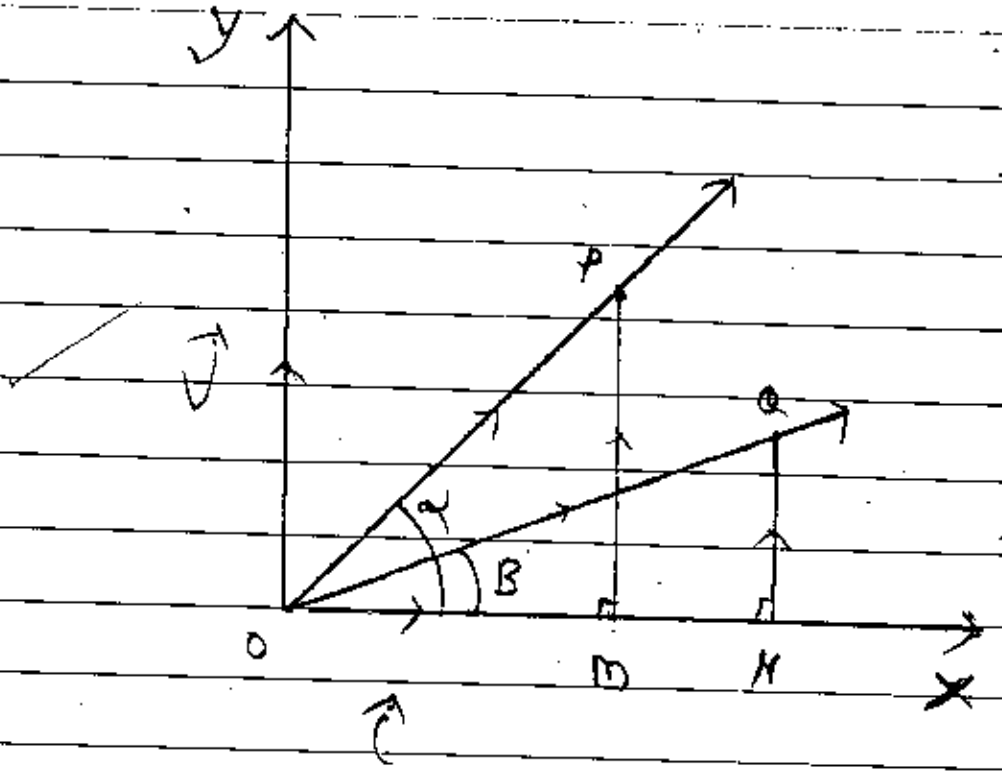
BSEMP

उत्तर → 21

सिद्धेय :-

$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha \cos\beta + \sin\alpha \sin\beta$

सिद्ध :-



माना कि दो सदिश जिनके परिमाण एकांक हैं अर्थात्

$|\vec{OP}| = 1$ तथा $|\vec{OQ}| = 1$

x तथा y अक्षों के बीच एक दूसरे से $(\alpha - \beta)$ कोण बनाते हैं।

अर्थात् सदिश $\vec{OP}$, x अक्ष से α तथा सदिश $\vec{OQ}$, x अक्ष से β कोण बनाता है।

BSEMP

माना कि x अक्ष के अनुदिश एकांक सदिश $\hat{i}$ तथा y अक्ष के अनुदिश एकांक सदिश $\hat{j}$ हैं।

$\triangle OPM$ में त्रिभुज योग नियम से

$$\vec{OP} = \vec{OM} + \vec{MP}$$

$$\vec{OP} = |\vec{OM}|(\hat{i}) + |\vec{MP}|(\hat{j})$$

अब $\vec{OM} = |\vec{OP}|\cos x$

$\vec{MP} = |\vec{OP}| \sin x$

तब

$$\vec{OP} = |\vec{OP}|\cos x\,(\hat{i}) + |\vec{OP}| \sin x\,(\hat{j})$$

$\because |\vec{OP}| = 1$ इकाई

$$\therefore \vec{OP} = \cos x\,(\hat{i}) + \sin x\,(\hat{j}) \quad \text{---(1)}$$

इसी प्रकार

$\triangle OQN$ में त्रिभुज योग नियम से

$$\vec{OQ} = \vec{ON} + \vec{NQ} \quad \text{या}$$

$$\vec{OQ} = |\vec{ON}|(\hat{i}) + |\vec{NQ}|(\hat{j})$$

(देखें)

पृष्ठ के अंकों का योग

$\therefore |\vec{ON}| = |\vec{OQ}| \cos B$

$|\vec{NQ}| = |\vec{OQ}| \sin B$

अब

$\vec{OQ} = |\vec{OQ}| \cos B (\hat{i}) + |\vec{OQ}| \sin B (\hat{j})$

$\therefore |\vec{OQ}| = 1$

$\therefore \vec{OQ} = \cos B(\hat{i}) + \sin B(\hat{j})$ — (II)

समी (I) व (II) से

अब $\vec{OP} \cdot \vec{OQ} = [\cos\alpha(\hat{i}) + \sin\alpha(\hat{j})] \cdot [\cos B(\hat{i}) + \sin(B)(\hat{j})]$

$\therefore \hat{i} \cdot \hat{i} = 1$ तथा $\hat{j} \cdot \hat{j} = 1$

$\therefore \vec{OP} \cdot \vec{OQ} = \cos\alpha \cdot \cos B + \sin\alpha \cdot \sin B$

(III)

तथा अदिश गुणन से

$\vec{OP} \cdot \vec{OQ} = |\vec{OP}| |\vec{OQ}| \cos(\alpha - B)$

पृष्ठ के अंकों का योग

BSEMP

BSEMP

$\because |\vec{OP}| = 1$ तथा $|\vec{OQ}| = 1$

$\therefore \vec{OP} \cdot \vec{OQ} = 1 \times 1 \cos(\alpha - \beta)$

$\vec{OP} \cdot \vec{OQ} = \cos(\alpha - \beta)$ ——— (IV)

समी (III) व (IV) से स्पष्ट है कि

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta + \sin\alpha \cdot \sin\beta$$

यही सिद्ध करना था।

हल करें

x 0 1 2 3 4 5 6 7
y 2 1 .5 .25 .13 .12 .12 .14

$2\left[\frac{1}{2} + .14 + 4(.5 + .25 + .13) + 2(.3 + .2)\right]$

$2\left[1.14 + 4 + 1\right]$

$2\left[\frac{1}{10} + .14 + 4(1 + .3 + .2) + 2(.5 + .35 + .10)\right]$

$2\{ \quad +4(1.5) + 2(1)$

BSEMP

पृष्ठ के अंकों का योग