प्रादर्श–प्रश्न पत्र **2013 – 2014**

[MODEL QUESTION PAPER]

Set-D

कक्षा – बारहवीं

Class - 12Th

विषय – गणित

Sub - Mathematics

समय – **3** घन्टे पूर्णांक – **100**

निर्देश–

1. सभी प्रश्न हल करना अनिवार्य है।
2. प्रश्न–पत्र में दो खण्ड है 'अ' एवं 'ब'
3. खण्ड (अ) में 1 से 5 तक वस्तुनिष्ठ प्रश्न है व प्रत्येक में 1 अंक निर्धारित है।
4. प्रश्न क्र. 6 से 10 तक प्रत्येक प्रश्न पर 2 अंक निर्धारित हैं।
5. प्रश्न क्र. 11 से 17 तक प्रत्येक प्रश्न पर 4 अंक है।
6. प्र. क्र. 18 से 22 तक प्रत्येक प्रश्न पर 5 अंक है।
7. प्रश्न क्र. 23 व 24 पर 6 अंक निर्धारित है।

Instruction :

1. All question are compulsory.
2. Question paper has two section 'A' and 'B'
3. In section 'A' Q.No. 1 to 5 is objective type each question carries 1 mark.
4. Q.No. 6 to 10 carries 2 mark.
5. Q.No. 11 to 17 carries 4 mark.
6. Q. No. 18 to 22 carries 5 mark.
7. Q.No. 23 and 24 carries 6 mark.

खण्ड – 'अ'

Section 'A'

प्र. 1 प्रत्येक प्रश्न में दिये विकल्पों में सही उत्तर लिखिए।

Choose the correct Answer.

(अ) $\frac{1}{x(x+2)}$ की आंशिक भिन्न होगी :

(i) $\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}$ (ii) $\frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+3}$

(iii) $\frac{1}{2}\left[\frac{1}{x} - \frac{1}{x+2}\right]$ (iv) $\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x-1}$

(A) Partial fraction of $\frac{1}{x(x+2)}$ is :

(i) $\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}$ (ii) $\frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+3}$

(iii) $\frac{1}{2}\left[\frac{1}{x} - \frac{1}{x+2}\right]$ (iv) $\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x-1}$

(ब) $\tan^{-1}\frac{1}{2} + \tan^{-1}\frac{1}{3}$ बराबर हैं :

(i) $\tan^{-1}\frac{1}{6}$ (ii) $\frac{\pi}{3}$

(iii) $\frac{\pi}{4}$ (iv) $\frac{\pi}{6}$

(B) $\tan^{-1}\frac{1}{2} + \tan^{-1}\frac{1}{3}$ is equal to :

(i) $\tan^{-1}\frac{1}{6}$ (ii) $\frac{\pi}{3}$

(iii) $\frac{\pi}{4}$ (iv) $\frac{\pi}{6}$

(स) घन के किन्हीं दो विकर्णों के कोण की कोज्या है।

(i) $\frac{1}{3}$ (ii) $\frac{1}{2}$

(iii) $\frac{2}{5}$ (iv) $\frac{1}{\sqrt{3}}$

(C) Cosine of the angle between the any two dliagonals of a cube is :

(i) $\frac{1}{3}$ (ii) $\frac{1}{2}$

(iii) $\frac{2}{5}$ (iv) $\frac{1}{\sqrt{3}}$

(द) $\log \sin x$ का अवकल गुणांक होगा :

(i) $\operatorname{cosec} x$ (ii) $\tan \boldsymbol{x}$

(iii) $\sec x$ (iv) $\cot x$

(D) What will be the differential coefficient of $\log \sin x$:

(i) $\operatorname{cosec} x$ (ii) $\tan \boldsymbol{x}$

(iii) $\sec x$ (iv) $\cot x$

(ई) $\int \operatorname{cosec} x \, dx$ का मान होगा :

(i) $\log\left(\tan\frac{x}{2}\right)$ (ii) $\log(\operatorname{cosec} x + \cot x)$

(iii) $\log(\sec x - \tan x)$ (iv) $\log\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)$

(E) The value of $\int \operatorname{cosec} x \, dx$ is :

(i) $\log\left(\tan\frac{x}{2}\right)$ (ii) $\log(\operatorname{cosec} x + \cot x)$

(iii) $\log(\sec x - \tan x)$ (iv) $\log\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)$

प्र. 2 रिक्त स्थान की पूर्ति कीजिए :

Fill in the blanks :

(अ) $\int_a^b f(x)dx$ के लिए सिम्पसन नियम .... है।

(A) The simpson's rule for $\int_a^b f(x)dx$ is..........

(ब) समीकरण $x^4 - x - 10 = 0$ का मूल .... अन्तराल में स्थित है।

(B) The root of equation $x^4 - x - 10 = 0$ is lines on ....interval.

(स) पूर्ण सहसम्बन्ध होने पर दोनो समाश्रयण रेखाएँ .... होती है।

(C) In perfact correlation both regression lines be ....

(द) दो चरों के बीच .... प्रकार का सम्बन्ध होता है।

(D) There are .... types of relationship between the two variable.

(इ) $\cos x$ का n वाँ अवकलज .... होगा।

(E) The n^{th} derivative of $\cos x$ is ....

प्र. 3 सही जोड़ी बनाईये :

3. Make the right match :

अ		ब	
A		B	
(i)	$\int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx$	(a)	$\frac{1}{2a} \log \frac{a+x}{a-x}$
(ii)	$\int \sqrt{x^2 - a^2}\, dx$	(b)	$\frac{x}{2} \sqrt{x^2 + a^2} + \frac{a^2}{2} \log \left[x + \sqrt{x^2 + a^2} \right]$
(iii)	$\int \frac{dx}{a^2 - x^2}$	(c)	$\frac{x}{2} \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2} \sin^{-1} \frac{x}{a}$
(iv)	$\int \frac{dx}{x^2 - a^2}$	(d)	$\frac{x}{2} \sqrt{x^2 + a^2} - \frac{a^2}{2} \log \left[x + \sqrt{x^2 - a^2} \right]$
(v)	$\int \sqrt{a^2 + x^2}\, dx$	(e)	$\frac{1}{2a} \log \frac{x-a}{x+a}$

प्र. 4 सत्य/असत्य लिखिए।

State true and false :

(अ) x – अक्ष की दिक् कोज्याएँ (1, 0, 0) होती है।

(A) Direction cosine of x-axis are (1, 0, 0)

(ब) बिन्दु (x, y, z) yz समतल से दूरी z होती है।

(B) Distance of yz plane from the point (x, y, z) is z.

(स) सदिश $\vec{a}$ की दिशा में एकांक सदिश $\frac{|\vec{a}|}{\vec{a}}$ है।

(C) Unit vector in the direction of vector $\vec{a}$ is $\frac{|\vec{a}|}{\vec{a}}$

(द) $\frac{d}{dx}(\sec x)$ का अवकलन गुणांक $\sec x \tan x$ है।

(D) Defferencial coeffecient of $\sec x$ is $\sec x \tan x$

(इ) सदिश $2\hat{i} + 3\hat{j} + \hat{k}$ तथा $2\hat{i} - \hat{j} - \hat{k}$ के बीच कोण शून्य है।

(E) The angle between the vectors $2\hat{i} + 3\hat{j} + \hat{k}$ and $2\hat{i} - \hat{j} - \hat{k}$.

प्र. 5 एक वाक्य के उत्तर दीजिए :

Give the answer in one sentence

(अ) समलम्ब चतुर्भुज का नियम का सूत्र लिखिए।

(A) Write the formula for Trapezoidal Rule.

(ब) न्यूटन रैफसन विधि से संख्या N का वर्गमूल ज्ञात करने का सूत्र लिखिए।

(B) Write the formula for finding square roof of any number N by Raphson's method

(स) सिम्पसन का नियम किस सिद्धान्त पर आधारित है ?

(C) The simpson's rule is based on which principle :

(द) किसी कण की अधिकतम ऊँचाई पर वेग सदैव कितना होता है ?

(D) What will be the velocity of any particle at maximum height ?

(इ) बिन्दु (x, y, z) की x – अक्ष से दूरी क्या होती है ?

(E) What will be the distance from x – *axis* to the point (x, y, z) ?

खण्ड – 'ब'

Section - 'B'

प्र. 6 सिद्ध कीजिए कि क्रम से ली गई त्रिभुज की तीन भुजाओं से निरूपित सदिशों का योग शून्य सदिश होता है।

Prove that addition of vectors repersented by three sides of a triangle is zero.

अथवा

(Or)

यदि किसी चतुर्भुज $ABCD$ के विकर्ण AC तथा BD हो तो सिद्ध कीजिए ।

$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{DB}$

AC and BD are the diagonals of a quadrilateral $ABCD$ prove that -

$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{DB}$

प्र. 7 सदिश विधि से बिन्दु (1, 2, –3) तथा (3, –2, 1) के बीच की दूरी ज्ञात कीजिए।

By using vector method find the distance between the paint (1, 2, –3) and (3, –2, 1)

अथवा

(Or)

सदिश $6\hat{i} - 2\hat{j} - 3\hat{k}$ की दिक्–कोज्याएँ ज्ञात कीजिए।

Find the direction cosine of vector $6\hat{i} - 2\hat{j} - 3\hat{k}$

प्र. 8 समतलों $\vec{r} \cdot (2\hat{i} - 3\hat{j} + 4\hat{k}) = 1$ तथा $\vec{r} \cdot (-\hat{i} - \hat{j}) = 4$ के बीच का कोण ज्ञात कीजिए।

Find the angle between the planes $\vec{r} \cdot (2\hat{i} - 3\hat{j} + 4\hat{k}) = 1$ and $\vec{r} \cdot (-\hat{i} - \hat{j}) = 4$.

अथवा **(Or)**

उस गोले का सदिश तथा कार्तीय समीकरण ज्ञात कीजिए जिसका केन्द्र (2, –3, 4) तथा त्रिज्या –5 है।

Find the vector and carstesian equation of the sphere whose centre (2, –3, 4) and radius is 5.

प्र. 9 $\int \frac{dx}{1+\sin x}$ का मान ज्ञात कीजिए।

Solve $\int \frac{dx}{1+\sin x}$

अथवा **(Or)**

$\int \left(\frac{\sec x}{\sec x - \tan x} \right) dx$ का मान ज्ञात कीजिए।

Evaluate $\int \left(\frac{\sec x}{\sec x - \tan x} \right) dx$.

प्र. 10 $\int \frac{\tan^{-1} x}{1+x^2} dx$ का मान ज्ञात कीजिए।

Evaluate $\int \frac{\tan^{-1} x}{1+x^2} dx$

अथवा **(Or)**

$\int \frac{e^{\cos^{-1} x}}{\sqrt{1-x^2}} dx$ का मान ज्ञात कीजिए।

Evaluate $\int \frac{e^{\cos^{-1} x}}{\sqrt{1-x^2}} dx$.

प्र. 11 $\frac{x}{x^3+1}$ को आंशिक भिन्न में विभक्त कीजिए।

Separate $\frac{x}{x^3+1}$ in to partial fraction.

अथवा **(Or)**

$\frac{x^3}{(1-x)^4}$ को आंशिक भिन्न में व्यक्त कीजिए।

Resolve $\frac{x^3}{(1-x)^4}$ into partial fraction.

प्र. 12 सिद्ध कीजिए कि–

$$\cos^{-1}\frac{3}{5} + \cos^{-1}\frac{12}{13} = \sin^{-1}\frac{63}{65}$$

Prove that

$$\cos^{-1}\frac{3}{5} + \cos^{-1}\frac{12}{13} = \sin^{-1}\frac{63}{65}$$

अथवा **(Or)**

सिद्ध कीजिए कि–

$$\tan^{-1}\frac{a-b}{1+ab} + \tan^{-1}\frac{b-c}{1+bc} + \tan^{-1}\frac{c-a}{1+ca} = 0$$

Prove that -

$$\tan^{-1}\frac{a-b}{1+ab} + \tan^{-1}\frac{b-c}{1+bc} + \tan^{-1}\frac{c-a}{1+ca} = 0$$

प्र. 13 $\log \tan\left[\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right]$ का x के सापेक्ष अवकलन कीजिए।

Find the differential coefficient of-

$$\log \tan\left[\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right]$$

अथवा / **(Or)**

यदि $y = \sin^{-1}2x\sqrt{1-x^2}$ हो, तो $\frac{dy}{dx}$ ज्ञात कीजिए।

If $y = \sin^{-1}2x\sqrt{1-x^2}$, then find $\frac{dy}{dx}$

प्र. 14 $(\sin x)^{\log x}$ का x के सापेक्ष अवकल गुणांक ज्ञात कीजिए।

Find the differential coefficient of $(\sin x)^{\log x}$ w.r.t.x.

अथवा **(Or)**

यदि $y = \sqrt{\log x + \sqrt{\log x + \sqrt{\log x + ...\infty}}}$ हो तो सिद्ध कीजिए कि $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x(2y-1)}$

If $y = \sqrt{\log x + \sqrt{\log x + \sqrt{\log x + ...\infty}}}$ then prove that - $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x(2y-1)}$

प्र. 15 एक कण निम्नांकित नियम से सरल रेखा में गतिमान है : $S = 5e^{-t}\cos t$

जब $t = \frac{\pi}{2}$ हो, तो इसका वेग व त्वरण क्या होगा ?

A particle is moving in a straight line according to law $S = 5e^{-t}\cos t$. find its velocity and acceleration when $t = \frac{\pi}{2}$

अथवा **(Or)**

फलन $f(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$ की अंतराल [1, 3] में रोले प्रमेय की जाँच कीजिए।

Verifly the Rolle's theorem for the function $f(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$ on [1, 3]

प्र. 16 निम्न आँकड़ों से सहसम्बन्ध गुणांक ज्ञात कीजिए।

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9
y	9	8	10	12	11	13	14	16	15

Find the correlation coeficient of the following data:

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9
y	9	8	10	12	11	13	14	16	15

अथवा **(Or)**

दो चर राशियों x और y का सहसम्बन्ध गुणांक r है, तो सिद्ध कीजिए।

$$r = \frac{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - \sigma_{x-y}^2}{2\sigma_x\sigma_y}$$

जहां $\sigma_x{}^2$, $\sigma_y{}^2$ और $\sigma_{x-y}{}^2$ क्रमशः x, y तथा $x - y$ के प्रसरण गुणांक है।

If r is a coefficient of correlation of two variable x *and* y then proved that,

$r = \frac{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - \sigma_{x-y}^2}{2\sigma_x\sigma_y}$, where $\sigma_x{}^2$, $\sigma_y{}^2$ and $\sigma_{x-y}{}^2$ are coefficient of variances of x, y and $x - y$ respectively.

प्र. 17 सिद्ध कीजिए कि समाश्रयण गुणांकों का समान्तर माध्य सहसम्बन्ध गुणांक से बड़ा होता है।

Prove that arithmetic mean of the regression coefficient is greater than the coefficient of correlation.

अथवा **(Or)**

दो समाश्रयण रेखाओं $x + 3y = 11$ और $2x + y = 7$ के आधार पर x और y के बीच सहसम्बन्ध गुणांक ज्ञात कीजिए। $y = 4$ के लिए x के मान की गणना कीजिए।

Find the correlation coefficient between x *and* y on the basis of two regression lines $x + 3y = 11$ and $2x + y = 7$ calculate the value of x then $y = 4$

प्र. 18 एक चर समतल मूल बिन्दु से P दूरी पर रहता है तथा अक्षों को बिन्दुओं A, B व C से निर्देशांक समतलों के समान्तर समतल खींचे जाते हैं। सिद्ध कीजिए कि उनके प्रतिच्छेद बिन्दु का बिन्दुपथ $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2} = \frac{1}{p^2}$ है।

A veriable plane is at a constant distance p from the origin and meets the coordinate axes in A, B, C, Through A, B, C the planes are chrawn parallel to the coordinate planes. Prove that the locus of point of their intersecting point is.

$$\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2} = \frac{1}{p^2}$$

अथवा **(Or)**

बिन्दु $(-1, -1, 2)$ से जाने वाला उस समतल का समीकरण ज्ञात कीजिए, जो समतलों $3x + 2y - 3z = 1$ और $5x - 4y + z = 5$ पर लम्ब हो।

Find the equation of the plane passing through the point $(-1, -1, 2)$ and perpendicular to the planes $3x + 2y - 3z = 1$ and $5x - 4y + z = 5$.

प्र. 19 यदि $f(x) = \log_e\left(\frac{1-x}{1+x}\right)$ हो, तो सिद्ध कीजिए कि $f(a) + f(b) = f\left(\frac{a+a}{1+ab}\right)$

If $f(x) = \log_e\left(\frac{1-x}{1+x}\right)$ then prove that $f(a) + f(b) = f\left(\frac{a+a}{1+ab}\right)$

अथवा **(Or)**

यदि $f(x) = \begin{cases} \frac{1-\cos 4x}{x^2} & x \neq 0 \\ 4 & x = 0 \end{cases}$ तो $f(x)$ के $x = 0$ पर सांतत्य की विवेचना कीजिए।

If $f(x) = \begin{cases} \frac{1-\cos 4x}{x^2} & x \neq 0 \\ 4 & x = 0 \end{cases}$ then discuss the continuity of $f(x)$ at $x = 0$

प्र. 20 सिद्ध कीजिए कि–

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sqrt{\sin x}}{\sqrt{\sin x}+\sqrt{\cos x}}\,dx = \frac{\pi}{4}$$

Prove that :

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sqrt{\sin x}}{\sqrt{\sin x}+\sqrt{\cos x}}\,dx = \frac{\pi}{4}$$

अथवा

(Or)

दीर्घवृत्त $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

find the area of the ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

प्र. 21 अवकल समीकरण $(1 + x^2)\frac{dy}{dx} + 2xy = 4x^2$ को हल कीजिए।

Solve the differential equation

$(1 + x^2)\frac{dy}{dx} + 2xy = 4x^2$

अथवा

(Or)

अवकल समीकरण $\cos^3 x\frac{dy}{dx} + y\cos x = \sin x$ को हल कीजिए।

Solve the differential equation $\cos^3 x\frac{dy}{dx} + y\cos x = \sin x$.

प्र. 22 दो घनाकार पाँसे एक साथ फेंके जाते है। पहले पाँसे पर विषम संख्या अथवा दोनों पाँसो के ऊपरी संख्याओं का योग 9 प्राप्त करने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।

Two cubical dice are thrown simultaneously. find the probability of getting an odd number on the first dice or the sum of 9'.

अथवा **(Or)**

एक सिक्का दो बार उछाला जाता है। शीर्षों की संख्या का प्रायिकता बंटन ज्ञात कीजिए।

A Coin is tossed twice. find the probability distribution of the number of head.

प्र. 23 एक गोले का समीकरण $x^2 + y^2 + z^2 - 3x - 2y + 2z - 15 = 0$ है इसके एक व्यास AB के सिरे A निर्देशांक को $(-1, 4, -3)$ है। सिरे B के निर्देशांक ज्ञात कीजिए।

AB is the diameter of the sphere $x^2 + y^2 + z^2 - 3x - 2y + 2z - 15 = 0$. the coordinate of A are (–1, 4, –3). find the coordinate of point B.

अथवा **(Or)**

सिद्ध कीजिए कि रेखाएँ $\frac{x+1}{3} = \frac{y+3}{5} = \frac{z+5}{7}$ एवं $\frac{x-2}{1} = \frac{y-4}{3} = \frac{z-6}{5}$ परस्पर प्रतिच्छेद करती हैं। प्रतिच्छेद बिन्दु के निर्देशांक ज्ञात कीजिए।

Prove that the lines $\frac{x+1}{3} = \frac{y+3}{5} = \frac{z+5}{7}$ and $\frac{x-2}{1} = \frac{y-4}{3} = \frac{z-6}{5}$ are intersecting to each other. find their point of intersection.

प्र. 24 सदिश विधि से सिद्ध कीजिए कि

$\cos(A + B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B$

Prove that by vector method

$\cos(A + B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B$

अथवा / **(Or)**

यदि D, E, F क्रमशः त्रिभुज ABC की भुजाओं BC, CA, AB के मध्य बिन्दु हो, तो सदिश विधि से सिद्ध कीजिए कि।

$$\Delta DEF = \frac{1}{4} \Delta ABC$$

If D, E, F are the mid point of the sides BC, CA, AB of the triangle ABC then prove by vector method that.

$$\Delta DEF = \frac{1}{4} \Delta ABC$$

कक्षा – **12** वीं

अंक योजना

Mark Dirsbution 2013-14

`हायर सेकेण्डरी पूर्णांक – 100

विषय : गणित समय – 3.00 घण्ट

क्र.	इकाई एवं विषय वस्तु	इकाई पर आ. अंक	वस्तुनिष्ठ 1 अंक	अंकवार प्रश्नो की संख्या				
				2 अंक	4 अंक	5 अंक	6 अंक	कुल प्रश्न
1.	आंशिक भिन्न	5	1	–	1	–	–	1
2.	प्रतिलोम फलन	5	1	–	1	–	–	1
3. 4. 5.	त्रिविमीय ज्यामितीय समतल सरल रेखा एवं गोला	15	4	–	–	1	1	2
6. 7. 8.	सदिश सदिशों का गुणनफल सदिशों का त्रिविमीय ज्या. में अनुप्रयोग	15	3	3	–	–	1	4
9.	फनल, सीमा, सांतत्य	5	–	–	–	1	–	1
10. 11.	अवकलन कठिन अवकलन	10	2	–	2	–	–	2
12.	अवकलन का अनुप्रयोग	5	1	–	1	–	–	1
13. 14. 15.	समाकलन कठिन समाकलन निश्चित समाकलन	15	6	2	–	1	–	3
16.	अवकलन समीकरण	05	–	–	–	1	–	1
17.	सहसंबंध	05	1	–	1	–	–	1
18.	समाश्रयण	05	1	–	1	–	–	1
19.	प्रायिकता	05	–	–	–	1	–	1
20.	आंकिक विधियाँ	05	5	–	–	–	–	–
	योग	100	25	5	7	5	2	19+ 5 = 24

निर्देश : प्रश्नपत्र निर्माण हेतु विशेष निर्देश

1. प्रश्न क्र. 1 से 5 तक 5 प्रकार के वस्तुनिष्ठ प्रश्न होगें। जिसके अंतर्गत एक शब्द में उत्तर मेंचिग, सही विकल्प तथा रिक्त स्थानों की पूर्ति के प्रश्न होंगे। प्रत्येक प्रश्न के लिए 1 अंक निर्धारित है। $(1 \times 5 \times 5 = 25)$ यह प्रश्न प्रत्येक छात्र को हल करना अनिवार्य है।
2. प्रश्न क्र. 6 से 24 प्रत्येक प्रकार के प्रश्नों की उत्तर सीमा नि. होगी

अतिलघुउत्तरीय प्रश्न	02 अंक	लगभग 30 शब्द
लघुउत्तररीय प्रश्न	04 अंक	लगभग 75 शब्द
दीर्घउत्तरीय प्रश्न	05 अंक	लगभग 120 शब्द
दीर्घउत्तरीय प्रश्न	06 अंक	लगभग 150 शब्द
निबंधात्मक प्रश्न	07 अंक	लगभग 250 से 150 शब्द

3. वस्तुनिष्ठ प्रश्नों को छोड़कर शेष सभी प्रश्नों में विकल्प योजना रहेगी।
4. विकल्प के प्रश्न उसी इकाई से, समान कठिनाई स्तर वाले तथा पाठ्यक्रम अनुसार होना चाहिए।
5. कठिनाई स्तर– 40% सरल प्रश्न, 45% सामान्य प्रश्न, 15% कठिन।

Answer – Sheet
Set-D
उत्तर पुस्तिका
Higher – Mathametics
उच्च गणित (XII)

प्र. 1

हलः सही विकल्प चुनकर लिखिए। **1 × 5 = 5**

अ. (A) (iii) $\frac{1}{2}\left[\frac{1}{x}-\frac{1}{x+2}\right]$

ब. (B) (iii) $\frac{\pi}{4}$

स. (C) (i) $\frac{1}{3}$

द. (D) (iv) $\cot x$

इ. (E) (i) $\log\left(\tan\frac{x}{2}\right)$

प्र. 2

हलः रिक्त स्थान की पूर्ति कीजिए। **1 × 5 = 5**

Fill in the blanks

(i) $\frac{h}{3}$ $[y_1 + y_{2n+1} + 4(y_2 + y_4 + y_6 + ...) + 2(y_3 + y_5 + ...y_{2n-1})]$

(ii) 5.5

(iii) सम्पाती / Coinsident

(iv) सरल सह सम्बन्ध / Simple Correlation

(v) $\cos\left(\frac{nx}{2}+x\right)$

प्र. 3

हलः सही जोड़ी बनाईए। **1 × 5 = 5**

Make the right match

1 (c) $\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2}\sin^{-1}\frac{x}{a}$

2 (d) $\frac{x}{2}\sqrt{x^2-a^2} - \frac{a^2}{2}\log[x + \sqrt{x^2-a^2}]$

3 (a) $\frac{1}{2a}\log\frac{a+x}{a-x}$

4 (e) $\frac{1}{2a}\log\frac{x-a}{x+a}$

5 (b) $\frac{x}{2}\sqrt{x^2+a^2} + \frac{a^2}{2}\log[x + \sqrt{x^2+a^2}]$

प्र. 4

हलः सत्य /असत्य लिखिए। **1 × 5 = 5**

State true and false.

अ. (i) सत्य

ब. (ii) असत्य

स. (iii) असत्य

द. (iv) सत्य

इ. (v) असत्य

प्र. 5

हलः एक वाक्य में उत्तर दीजिए। **1 × 5 = 5**

Give the answer in one sentence.

(i) $\int_a^b f(x)\,dx = \frac{h}{3}[y_0 + 2(y_1 + y_2 + y_3 + \dots y_{n-1}) + y_n]$

(ii) $x_{n+1} = \frac{1}{2}\left[x_n + \frac{N}{x_n}\right]$

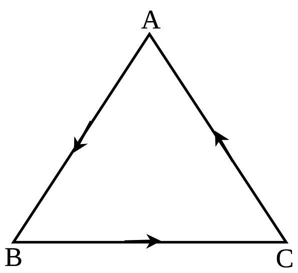
(iii) परवलय/ Parabola

(iv) शून्य/ Zero

(v) $\sqrt{y^2+z^2}$

प्र. 6

हलः



1 अंक

माना कि त्रिभुज ABC में

$$\overrightarrow{AB} = \vec{a},\ \overrightarrow{BC} = \vec{b},\ \overrightarrow{CA} = \vec{c}$$

तब हमें सिद्ध करना हैं कि

$$\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{o}$$

ΔABC में सदिश योग के त्रिभुज नियम से,

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = -\overrightarrow{CA}$$

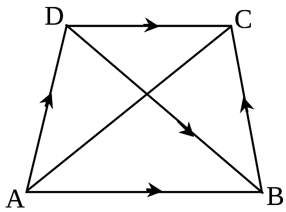
दोनों पक्षों में सदिश $\overrightarrow{CA}$ जोड़ने पर

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = -\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CA} = \vec{o}$$ 1 अंक

$\Rightarrow \quad \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{o}$

यही सिद्ध करना था।

अथवा



माना $ABCD$ एक चतुर्भुज है।

ΔABC में सदिश योग के त्रिभुज नियम से 1 अंक

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$$

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BC} \quad ...(1)$$

पुनः ΔBCD में सदिश योग के त्रिभुज नियम से,

$$\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{BC} \quad ....(2)$$

समी. (1) और समी. (2) को जोड़ने पर

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{BC}$$

$$= \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{DB} + \left(\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BC}\right)$$

$$= \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{DB} + \vec{o}$$

$$= \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{DB}$$ 1 अंक

यही सिद्ध करना है।

प्र. 7

हलः माना दो बिन्दु A व B है जिनके निर्देशांक क्रमशः (1, 2, –3) तथा (3, –2, 1) है।

$\therefore \quad \overrightarrow{OA} = \hat{i} + 2\hat{j} - 3\hat{k}$ तथा $\overrightarrow{OB} = 3\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}$

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$$

$\therefore \quad \overrightarrow{AB} = (3\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}) - (\hat{i} + 2\hat{j} - 3\hat{k})$

$$= 2\hat{i} - 4\hat{j} + 4\hat{k}$$ 1 अंक

$\therefore \quad AB = \left|\overrightarrow{AB}\right| = |2\hat{i} - 4\hat{j} + 4\hat{k}|$

$$= \sqrt{2^2 + (-4)^2 + (4)^2}$$

$$= \sqrt{4+16+16}$$

$$= \sqrt{36} = 6$$ 1 अंक

अथवा

माना $\vec{r} = 6\hat{i} - 2\hat{j} - 3\hat{k}$

$$r = |\vec{r}| = \sqrt{6^2 + (-2)^2 + (-3)^2}$$

$$= \sqrt{36+4+9}$$

$$= \sqrt{49}$$

$$r = 7$$ 1 अंक

यहाँ $a = 6, b = -2, c = 3$

$\therefore$ दी गई सदिश की दिक् कोज्जयाएँ है–

$$\frac{a}{r}, \frac{b}{r}, \frac{c}{r} \Rightarrow \frac{6}{7}, -\frac{2}{7}, \frac{-3}{7}$$ 1 अंक

प्र. 8

हलः यहाँ $h_1 = 2\hat{i} - 3\hat{j} + 4\hat{k}$

$$h_2 = -\hat{i} + \hat{j}$$

माना समतलों के बीच का कोण θ है। तब

$$\cos\theta = \frac{\bar{n}_1 \bar{n}_2}{|\bar{n}_1||\bar{n}_2|}$$ 1 अंक

$$= \frac{(2\hat{i}-3\hat{j}+4\hat{k})(-\hat{i}+\hat{j})}{\sqrt{4+9+16}\sqrt{1+1}} = \frac{-2.-3}{\sqrt{29}\sqrt{2}}$$

$$= \frac{-5}{\sqrt{58}}$$

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{-5}{\sqrt{58}}\right)$$ 1 अंक

अथवा

(a) सदिश समीकरण

$$\vec{c} = 2\vec{i} - 3\vec{j} + 4\vec{k}$$

अतः समीकरण होगाः

$$|\vec{r} - \vec{c}| = a$$

$$\Rightarrow \quad \left|\vec{r} - (2\hat{i} - 3\hat{j} + 4\hat{k})\right| = 5$$ 1 अंक

(b) कार्तीय समीकरण–

$$(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 + (z-\gamma)^2 = a^2$$

केन्द्र के निर्देशांक $(\alpha, \beta, \gamma) = (2, -3, 4)$ तथा

त्रिज्या $a = 5$

उपयुक्त सूत्र में मान रखने पर

$(x-2)^2 + (y+3)^2 + (z-4)^2 = a^2$

$x^2 - 4x + 4 + y^2 + 6y + 9 + z^2 - 8z + 16$ = 25

$x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 6y - 8z + 4 = 0$ 1 अंक

प्र. 9

हलः माना $\int \frac{dx}{1+\sin x}$

अंश ओर हर में $(1-\sin x)$ से गुणा करने पर

$$= \int \frac{1-\sin x}{(1+\sin x)(1-\sin x)} dx$$

$$= \int \frac{1-\sin x}{1-\sin^2 x} dx$$

$$= \int \frac{1-\sin x}{\cos^2 x} dx \qquad \{\therefore\ 1-\sin^2 x = \cos^2 x\}$$

$$= \int \frac{1}{\cos^2 x} dx - \int \frac{\sin x}{\cos^2 x} dx$$ 1 अंक

$$= \int \sec^2 x\, dx - \int \frac{1}{\cos x} \cdot \frac{\sin x}{\cos x} dx$$

$$= \int \sec^2 x\, dx - \int \sec x .\tan x\, dx$$

$= \tan x - \sec x + C$ 1 अंक

अथवा

$= \int \frac{\sec x}{(\sec x - \tan x)} dx$ अंश और हर में $(\sec x + \tan x)$ से गुणा करने पर

$$= \int \frac{\sec x(\sec x + \tan x)}{(\sec x - \tan x)(\sec x + \tan x)} dx$$

$$= \int \frac{\sec x(\sec x + \tan x)}{\sec^2 x - \tan^2 x} dx$$

$$= \int \frac{\sec x(\sec x + \tan x)}{1 + \tan^2 x - \tan^2 x} dx$$ 1 अंक

$$= \int \frac{\sec^2 x + \sec x.\tan x}{1} dx$$

$$= \int \sec^2 x\, dx + \int \sec x \tan x\, dx$$

$= \tan x + \sec x + C$ 1 अंक

प्र. 10

हलः $= \int \frac{e^{\cos^{-1} x}}{\sqrt{1-x^2}} dx$

$\cos^{-1}x = t$ रखने पर

$$\Rightarrow \quad \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\,dt$$ 1 अंक

$$\Rightarrow \quad -\int e^t\, dt = -e^t$$

$$= -e^{\cos^{-1} x}$$ 1 अंक

अथवा

$$= \int \frac{\tan^{-1} x}{1+x^2}\, dx$$

$\tan^{-1}x = t$ रखने पर

$$\frac{dx}{1+x^2} = dt$$ 1 अंक

$$\Rightarrow \quad \int t\, dt = \frac{t^2}{2}$$

$$\Rightarrow \quad = \frac{\left(\tan^{-1} x\right)^2}{2}$$ 1 अंक

प्र. 11

हलः माना कि

$$\frac{x}{x^3+1} = \frac{x}{(x+1)\left(x^2-x+1\right)}$$

$$= \frac{A}{(x+1)} + \frac{Bx+c}{x^2-x+1} \qquad ...(1)$$

$$\frac{x}{(x+1)\left(x^2-x+1\right)} = \frac{A\left(x^2-x+1\right)+(Bx+c)(x+1)}{(x+1)\left(x^2-x+1\right)}$$ 1 अंक

$$x = A\,(x^2 - x + 1) + (Bx + C)\,(x + 1) \qquad ...(2)$$

समी. (2) में $x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1$ रखने पर

$$-1 = A\,[(-1)^2 + (-1) + 1] + 0$$

$$3A = -1$$

$$A = \frac{1}{3}$$ 1 अंक

समी. (2) से

$$x = Ax^2 - Ax + A + Bx^2 + Bx + Cx + C$$

$$x = A\,(x^2 - x + 1) + (Bx + C)\,(x + 1)$$

$$x = (A + B)\,x^2 + x\,(-A + B + C) + (A + C)$$

x^2 के गुणाकों की तुलना करने पर

$$A + B = 0$$

$$B = -A$$
$$B = -\left(-\frac{1}{3}\right)$$
$$B = \frac{1}{3}$$

x के गुणांकों की तुलना करने पर

$$-A + B + C = 1$$
$$C = 1 + A - B$$
$$C = 1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{3}$$
$$C = \frac{1}{3}$$ 1 अंक

A, B, C के मान समी. (1) में रखने पर

$$\frac{x}{x^3+1} = \frac{-1}{3(x+1)} + \frac{\frac{1}{3}x+\frac{1}{3}}{x^2-x+1}$$

$\therefore$ $$\frac{x}{x^3+1} = \frac{-1}{3(x+1)} + \frac{x+1}{3(x^2-x+1)}$$ 1 अंक

अथवा

माना कि $1 - x = y$

$$x = 1 - y$$
$$x^3 = (1-y)^3 = 1 - 3y + 3y^2 - y^3$$
$$\frac{x^3}{(1+x)^4} = \frac{1-3y+3y^2-y^3}{y^4}$$ 2 अंक
$$= \frac{1}{y^2} - \frac{3y}{y^4} + \frac{3y^2}{y^4} - \frac{y^2}{y^4}$$
$$= \frac{1}{y^4} - \frac{3}{y^3} + \frac{3}{y^2} - \frac{1}{y}$$
$$= \frac{1}{(1-x)^4} - \frac{3}{(1-x)^3} + \frac{3}{(1+x)^2} - \frac{1}{(1+x)}$$ 2 अंक

प्र. 12

हल: $\cos^{-1}\frac{3}{5} + \cos^{-1}\frac{12}{13}$

$$= \cos^{-1}\left[\frac{3}{5}\times\frac{12}{13} - \sqrt{1-\left(\frac{3}{5}\right)^2}\sqrt{1-\left(\frac{12}{13}\right)^2}\right]$$

$$= \cos^{-1}\left[\frac{36}{65} - \sqrt{\frac{25-9}{25}}\sqrt{\frac{169-144}{169}}\right]$$

$$= \cos^{-1}\left[\frac{36}{65} - \sqrt{\frac{16}{25}}\sqrt{\frac{25}{169}}\right]$$

$$= \cos^{-1}\left[\frac{36}{65} - \frac{4}{5}\times\frac{5}{13}\right]$$

$$= \cos^{-1}\left[\frac{36-20}{65}\right]$$

$\Rightarrow$ $$= \cos^{-1}\ \frac{16}{65}$$ 2 अंक

$$= \sin^{-1}\sqrt{1-\left(\frac{16}{65}\right)^2} \qquad \left[\therefore \cos^{-1}x = \sin^{-1}\sqrt{1-x^2}\right]$$

$$= \sin^{-1}\sqrt{\frac{(65)^2-(16)^2}{(65)^2}}$$

$$= \sin^{-1}\sqrt{\frac{(65+16)-(65-16)}{(65)^2}}$$

$$= \sin^{-1}\sqrt{\frac{81\times 49}{(65)^2}}$$

$$= \sin^{-1}\frac{9\times 7}{65}$$

$$= \sin^{-1}\frac{63}{65}$$ दाया पक्ष 2 अंक

अथवा

$$\tan^{-1}x - \tan^{-1}y = \tan^{-1}\ \frac{x-y}{1+xy}$$ 1 अंक

$x=a$ तथा $y = b$ रखने पर

$$\tan^{-1}a - \tan^{-1}b = \tan^{-1}\frac{a-b}{1+ab} \qquad ....(1)$$

इसी प्रकार

$$\tan^{-1}b - \tan^{-1}c = \tan^{-1}\frac{b-c}{1+bc} \qquad ....(2)$$

1 अंक

$$\tan^{-1}c - \tan^{-1}a = \tan^{-1}\frac{c-a}{1+ca} \qquad ....(3)$$

L.H.S. $$= \tan^{-1}\frac{a-b}{1+ab} + \tan^{-1}\frac{b-c}{1+bc} + \tan^{-1}\frac{c-a}{1+ca}$$

समी. (1), (2) व (3) से

$= \tan^{-1}a - \tan^{-1}b + \tan^{-1}c + \tan^{-1}c - \tan^{-1}a$

$= 0 \ R.H.S.$ 2 अंक

प्र. 13

हलः $y = \log\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)$

$\therefore$ $\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\log\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)$

अब $\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right) = t$ रखने पर

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\log t$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dt}\log t . \frac{dt}{dx} \qquad \left[\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}.\frac{dt}{dx}\right]$$

$\Rightarrow$ $= \frac{1}{t}\frac{d}{dx}\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)$ 1 अंक

अतः $\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2} = u$ रखने पर

$$= \frac{1}{\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)}\frac{d}{dx}\tan u$$

$$= \frac{1}{\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)}\frac{d}{du}\tan u\frac{du}{dx}$$ 1 अंक

$$= \frac{\sec^2 u}{\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)}\frac{d}{dx}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\frac{\sec^2\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)}{\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)}$$

$$= \frac{1}{2}\frac{1}{\cos^2\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)}.\frac{\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)}$$

$$= \frac{1}{2\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)}$$

$$= \frac{1}{\sin^2\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)} = \frac{1}{\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)}$$

$$= \frac{1}{\cos x}.\sec x$$ 2 अंक

अथवा

दिया है $y = \sin^{-1}[2x\sqrt{1-x^2}]$

$x = \sin\theta$ रखने पर

$\theta = \sin^{-1}x$ ...(1)

$$y = \sin^{-1}\left[2\sin\theta\sqrt{1-\sin^2\theta}\right]$$

$$y = \sin^{-1}\left[2\sin\theta\sqrt{\cos^2\theta}\right]$$

$$y = \sin^{-1}[2\sin\theta\cos\theta]$$

$$y = \sin^{-1}[\sin 2\theta] \qquad [\therefore 2\sin\theta.\cos\theta = \sin 2\theta]$$

$$y = 2\theta \left[\therefore \sin^{-1}(\sin x) = x\right]$$ 2 अंक

समी (1) से $y = 2\sin^{-1}x$

x के सापेक्ष अवकलन करने पर

$$\frac{dy}{dx} = 2\frac{d}{dx}\sin^{-1}x$$

$\therefore$ $$\frac{dy}{dx} = \frac{2}{\sqrt{1-x^2}}$$ 2 अंक

प्र. 14

हल: माना $y = (\sin x)^{\log x}$

log लेने पर

$$\log y = \log(\sin)^{\log x}$$

$$\log y = \log x.\log(\sin x)$$

x के सापेक्ष अवकलन करने पर

$$\Rightarrow \frac{d}{dx}\log y = \frac{d}{dx}\left[\log x.\log(\sin x)\right]$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dy}\log y\frac{dy}{dx} = \log\frac{d}{dx}\log(\sin x) + \log(\sin x)\frac{d}{dx}\log x$$ 2 अंक

माना $\sin xt$

$$\Rightarrow \frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \log x\frac{d}{dx}\log t + \frac{\log(\sin x)}{x}$$

$\Rightarrow$ $$\frac{dy}{dx} = y\left[\log x \frac{d}{dt}\log t \frac{dt}{dx} + \frac{\log(\sin x)}{x}\right]$$

$\Rightarrow$ $$\frac{dy}{dx} = (\sin x)^{\log x}\left[\frac{\log x}{t}\frac{d}{dx}\sin x + \frac{\log(\sin x)}{x}\right]$$

$\Rightarrow$ $$\frac{dy}{dx} = (\sin x)^{\log x}\left[\log x \frac{\cos x}{\sin x} + \frac{\log(\sin x)}{x}\right]$$

$\Rightarrow$ $$\frac{dy}{dx} = (\sin x)^{\log x}\left[\cot x.\log x + \frac{\log(\sin x)}{x}\right]$$ 2 अंक

अथवा

दिया गया है–

$$y = \sqrt{\log x + \sqrt{\log x + \sqrt{\log x + ...\infty}}}$$

$\Rightarrow$ $$y = \sqrt{\log x + y}$$

दोनों पक्षों का वर्ग करने पर

$$y^2 = \log x + y$$

$$y^2 - y = logx$$ 1 अंक

दोनों पक्षों का x के सापेक्ष अवकलन करने पर

$$\frac{d}{dx}\ (y^2 - y) = \frac{d}{dx}\log x$$

$$\frac{d}{dx}y^2 - \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}$$ $\left[\therefore \frac{d}{dx}\log x = \frac{1}{x}\right]$

$\Rightarrow$ $$\frac{d}{dx}y^2\ \frac{dy}{dx} - \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}$$ 1 अंक

$$2y = \frac{dy}{dx} - \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}$$

$$(2y - 1)\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x(2y-1)}$$ 2 अंक

प्र. 15

हलः $$t = \frac{\pi}{2}$$

$$S = 5e^{-1}\ \cos t$$

वेग $$\frac{ds}{dt} = 5\frac{d}{dt}(e^{-t}\ \cos t)$$

$$v = 5\left[e^{-t}\frac{d}{dt}\cos t + \cos t \frac{d}{dt}e^{-t}\right]$$

$$v = 5\left[-e^{-t}\sin t - e^{-t}\cos t\right]$$

$$v = -5e^{-t}\,[\sin t + \cos t]$$ 1 अंक

जब $t = \frac{\pi}{2}$ का तब वेग

$$v = -5e^{-\frac{\pi}{2}}\left[\sin\frac{\pi}{2} + \cos\frac{\pi}{2}\right]$$

$$v = -5e^{-\frac{\pi}{2}}\,[1 + 0]$$

$$v = -5e^{-\frac{\pi}{2}}$$ इकाई

त्वरण $\frac{dv}{dt} = -5\frac{d}{dt}\left[e^{-t}(\sin t + \cos t)\right]$ 1 अंक

$$f = -5\left[-(\sin t + \cos t)\frac{d}{dt}e^{-t} + e^{-t}\frac{d}{dt}(\sin t, \cos t)\right]$$

$\Rightarrow$ $f = -5\left[-(\sin t + \cos t)e^{-t} + e^{-t}(\cos t - \sin t)\right]$

$\Rightarrow$ $f = -5e^{-t}\,[-\sin t - \cos t + \cos t - \sin t]$

$$f = (-5)\,(-2)e^{-t}\,[\sin t]$$

$$f = 10e^{-t}\sin t$$ इकाई

$t = \frac{\pi}{2}$ पर कण का त्वरण

$$f = 10\,e^{\frac{-\pi}{2}}\sin\frac{\pi}{2}$$

$$f = 10\,e^{\frac{-\pi}{2}}$$ 2 अंक

अथवा

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$$

दिया गया फलन बहुपदीय फलन है। अतः यह अन्तराल [1, 3] में संतत होगा।

$$\frac{d}{dx}f(x) = \frac{d}{dx}[x^3 - 6x^2 + 11x - 6]$$

$$f'(x) = 3x^2 - 12x + 11$$

दिया गया फलन अन्तराल [1, 3] में अवकलनीय है।

$$f(1) = (1)^3 - 6(1)^2 + 11 \times 1 - 6$$

$$f(1) = 0$$ 1 अंक

$$f(3) = 3^3 - 6\,(3)^2 + 11 \times 3 - 6$$

$$= 27 - 54 + 33 - 6$$

$$f(3) = 0$$

अतः $f(1) = f(3)$ 1 अंक

अन्तराल $[1, 3]$ में C इस प्रकार है कि

$$f'(c) = 0$$

$$f'(c) = 3c^2 - 12c + 11 = 0$$

$$C = \frac{-(-12) \pm \sqrt{(-12)^2 - 4 \times 3 \times 11}}{2 \times 3}$$

$$C = \frac{12 \pm \sqrt{144 - 132}}{6}$$

$$C = \frac{12 \pm \sqrt{12}}{6}$$

$$C = \frac{12 \pm 2\sqrt{3}}{6}$$

$$C = \frac{6 \pm \sqrt{3}}{3}$$

$$C = \left(2 \pm \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

स्पष्ट है कि c के दोनों मान अन्तराल $[1, 3]$ में है अतः $C = \left(2 \pm \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \in [1, 3]$ इस प्रकार है कि $f'(c) = 0$ रोले प्रमेय सत्य हुआ। 2 अंक

प्र. 16

हलः

x	y	$dx = x - 5$	$dy = y - 11$	$dxdy$	dx^2	dy^2
1	9	–4	–2	8	16	4
2	8	–3	–3	9	9	9
3	10	–2	–1	2	4	1
4	12	–1	1	–1	1	1
5	11	0	0	0	0	0
6	13	1	2	2	1	4
7	14	2	3	6	4	9
8	16	3	5	15	9	25
9	15	4	4	16	16	16
		$\sum dx = 0$	$\sum dy = 0$	$\sum dx.dy = 57$	$\sum dx^2 = 60$	$\sum dy^2 = 69$

2 अंक

हम जानते है कि

$$r = \frac{n\sum dxdy - \sum dx \sum dy}{\sqrt{n\sum dx^2 - \left(\sum dx\right)^2}\sqrt{n\sum dy^2 - \left(\sum dy\right)^2}}$$

$$r = \frac{9\times57-0\times9}{\sqrt{9\times60-(0)^2}\sqrt{9\times69-(9)^2}}$$ 1 अंक

$$= \frac{9\times57}{3\sqrt{60}\times3\sqrt{60}} = \frac{57}{60} = 0.95$$ 1 अंक

अथवा

हम जानते है कि–

$$\sigma_{x-y}^2 = \frac{1}{n}\left[(x-y)-(\bar{x}-\bar{y})\right]^2$$

$$= \frac{1}{n}\left[x-y-\bar{x}+\bar{y}\right]^2$$

$$= \frac{1}{n}\left[(x-\bar{x})-(y-\bar{y})\right]^2$$

$$= \frac{1}{n}\sum\left[(x-\bar{x})^2+(y-\bar{y})^2-2(x-\bar{x})(y-\bar{y})\right]$$

2 अंक

$$= \frac{1}{n}\sum(x-\bar{x})^2 + \frac{1}{n}\sum(y-\bar{y})^2 -$$

$$2\frac{1}{n}\sum(x-\bar{x})(y-\bar{y})$$

$\Rightarrow$ $$\sigma_{x-y}^2 = \sigma_x^2 + \sigma_y^2 - 2r\sigma_x\sigma_y \quad \left[\because\ r = \frac{\sum(x-\bar{x})(y-\bar{y})}{n\sigma_x\sigma_y}\right]$$

$\Rightarrow$ $$2r\sigma_x\sigma_y = \sigma_x^2 + \sigma_y^2 - \sigma_{x-y}^2$$

$\Rightarrow$ $$r = \frac{\sigma_x^2+\sigma_y^2-\sigma_{x-y}^2}{2\sigma_x\sigma_y}$$ 2 अंक

प्र. 17

हलः x का y पर समाश्रयण गुणांक

$$b_{xy} = r\,\frac{\sigma_x}{\sigma_y} \qquad ....(1)$$

y का x पर समाश्रयण गुणांक

$$b_{yx} = r\,\frac{\sigma_y}{\sigma_x} \qquad ....(2)$$ 1 अंक

हम सिद्ध करेगें कि

$$\frac{b_{xy}+b_{yx}}{2} > r$$

$$b_{yx} + b_{xy} > 2r$$

$$\Rightarrow \quad r\frac{\sigma_y}{\sigma_x} + r\frac{\sigma_x}{\sigma_y} > 2r$$ 1 अंक

समी. (1) एवं (2) से

$$\Rightarrow \quad \frac{\sigma_y}{\sigma_x} + \frac{\sigma_x}{\sigma_y} > 2$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\sigma_y^2 + \sigma_x^2}{\sigma_x \sigma_y} > 2$$

$$\Rightarrow \quad \sigma_y^2 + \sigma_x^2 > 2.\sigma_x \sigma_y$$

$$\Rightarrow \quad \sigma_y^2 + \sigma_x^2 - 2.\sigma_x \sigma_y > 0$$

$$\Rightarrow \quad (\sigma_y - \sigma_x) > 0$$ 2 अंक

अथवा

$$x + 3y = 11 \quad ....(1)$$

$$2x + y = 7 \quad .....(2)$$

y का x पर समाश्रयण रेखा है,

$$x + 3y = 11$$

$$3y = -x + 11$$

$$y = -\frac{1}{3}x + \frac{11}{3}$$

$$\therefore \quad b_{yx} = -\frac{1}{3}$$ 1 अंक

x की y पर समाश्रयण रेखा है।

$$2x + y = 7$$

$$2x = -y + 7$$

$$x = -\frac{1}{2}y + \frac{7}{2} \quad ...(3)$$

हम जानते है कि

$$r = \sqrt{b_{yx}.b_{xy}}$$ 1 अंक

$$= \sqrt{\left(-\frac{1}{3}\right)\times\left(-\frac{1}{2}\right)} = \sqrt{\frac{1}{6}} \qquad \begin{bmatrix} \therefore\ b_{yx} = -v_e \\ b_{xy} = -v_e \\ \therefore\ r = -v_e \end{bmatrix}$$

$$r = -\frac{1}{\sqrt{6}}$$

[$\therefore$ दोनों समाश्रयण गुणांक ऋणात्मक है]

समी. (3) से

$$x = -\frac{1}{2}y + \frac{7}{2}$$

$y = 4$ तब

$$x = -\frac{1}{2} \times 4 + \frac{7}{2}$$

$$= -2 + \frac{7}{2} = -\frac{4+7}{2}$$

$$x = \frac{3}{2}$$ 2 अंक

प्र. 18

हलः माना समतल का समीकरण है–

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1 \qquad ...(1)$$ 1 अंक

समतल (1) पर मूल बिन्दु सो डाले गये लंब की लम्बाई P है।

$$P = \left| \frac{\frac{0}{a} + \frac{0}{b} + \frac{0}{c} - 1}{\sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}}} \right|$$

वर्ग

$$P = \left| -\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}}} \right|$$ 2 अंक

दोनों पक्षों का वर्ग करने पर

$$P^2 = \frac{1}{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}}$$

$$\frac{1}{P^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}$$

समतल (1) अक्षों $A\ (a, 0, 0), B\ (0, b, 0), C\ (0, 0, c)$ पर काटता हैं

बिन्दुओं A, B, C से निर्देशांक समतलों के समान्तर खींचे गये समतलों के समीकरण होगें।

$$x = a,\ y = b,\ z = c$$

a, b, c के मान समी. (2) में रखने पर अभीष्ट बिन्दु पथ होगा।

$$\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2} = \frac{1}{p^2}$$ 2 अंक

अथवा

बिन्दु (–1, –1, 2) से होकर जाने वाले समतल का समीकरण होगा–

$$A\ (x + 1) + B\ (y + 1) + C\ (z - 2) = 0 \qquad ...(1)$$ 1 अंक

दिये गये समतलों के समीकरण है–

$$3x + 2y - 3z = 1 \qquad ...(2)$$

तथा $5x - 4y + z = 5$ ....(3)

समतल (1) और (2) लम्बवत् है इसलिए

$$3A + 2B - 3C = 0 \quad ...(4)$$

समतल (2) और (3) लम्बवत् है, इसलिए

$$5A - 4B + C = 0 \quad ...(5)$$

समीकरण (4) और (5) से

$$3A + 2B - 3C = 0$$
$$5A - 4B + C = 0$$

$\Rightarrow$ $$\frac{A}{-10} = \frac{B}{-18} = \frac{C}{-22} = 0$$ 2 अंक

माना $$\frac{A}{5} = \frac{B}{9} = \frac{C}{11} = k$$

$$A = 5k,\ B = 9k,\ C = 11k$$

A, B, C के मान समीकरण (1) में रखने पर

$$5k(x + 1) + 9k(y + 1) + 11k(z - 2) = 0$$

$$5x + 9y + 11z - 8 = 0$$ 2 अंक

प्र.19

हलः दिया है– $$f(x) = \log_e \frac{1-x}{1+x} \quad ...(1)$$

समी. (1) में $x = a$ रखने पर

$$f(a) = \log_e \frac{1-a}{1+a} \quad ....(2)$$

समी (1) में $x = b$ रखने पर

$$f(b) = \log_e \frac{1-b}{1+b} \quad ....(3)$$ 1 अंक

समी (1) और समी (2) को जोड़ने पर

$$f(a) + f(b) = \log_e \frac{1-a}{1+a} + \log_e \frac{1-b}{1+b}$$

$\Rightarrow$ $$f(a) + f(b) = \log_e \frac{(1-a)(1-b)}{(1+a)(1+b)}$$ 1 अंक

$\Rightarrow$ $$f(a) + f(b) = \log_e \frac{1-a-b+ab}{1+a+b+ab} \quad ....(4)$$

समी. (1) में $x = \dfrac{a+b}{1+ab}$ रखने पर 1 अंक

$\Rightarrow$ $$f\left(\frac{a+b}{1+ab}\right) = \log_e \frac{1-\left(\frac{a+b}{1+ab}\right)}{1+\left(\frac{a+b}{1+ab}\right)}$$

$$\Rightarrow \qquad f\left(\frac{a+b}{1+ab}\right)=\log_e \frac{\frac{1+ab-a-b}{1+ab}}{\frac{1+ab+a+b}{1+ab}}$$

$$\Rightarrow \qquad f\left(\frac{a+b}{1+ab}\right)=\log_e \frac{1+ab-a-b}{1+ab+a+b} \qquad ...(5)$$

समी. (4) व (5) से

$$f(a)+f(b)=f\left(\frac{a+b}{1+ab}\right)$$ 2 अंक

अथवा

दिया है $\qquad f(x)=\dfrac{1-\cos 4x}{x^2}$

$x = 0 + h$ रखने पर जब $x \to 0$ तब $h \to 0$

$$Rf\,(0+h)=\lim_{h\to 0}\frac{1-\cos 4(0+h)}{h^2}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{1-\cos 4h}{h^2}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{2\sin^2\frac{4h}{2}}{h} \qquad \left[\therefore 1-\cos x=\frac{2\sin^2 x}{2}\right]$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{2\sin^2 2h}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{2\sin 2h\sin 2h}{2h}\times 4$$

$$=\lim_{h\to 0}\left(\frac{\sin 2h}{2h}\right)^2\times 8$$

$$=1\times 8=8$$ 2 अंक

$x = 0 - h$ रखने पर जब $x \to 0$ तब $h \to 0$

$$Lf\,(0-h)=\lim_{h\to 0}\frac{1-\cos 4(0-h)}{h^2}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{1-\cos 4h}{h^2}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{2\sin^2 2h}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{2\sin 2h.\sin 2h}{2h\times 2h}\times 4$$

$$=\lim_{h\to 0}\left(\frac{\sin 2h}{2h}\right)^2\times 8$$

$$=1\times 8=8$$ 2 अंक

दिया है $\qquad f(0)=4$

$$Rf(0+h)=f(0-h) \neq f(0)$$ 1 अंक

अतः दिया गया फलन $x=0$ पर संतत नहीं है।

प्र. 20

हलः माना $$= \int_0^{\pi/2} \frac{\sqrt{\sin x}}{\sqrt{\sin x}+\sqrt{\cos x}}\,dx \qquad ....(1)$$

$$= \int_0^{\pi/2} \frac{\sqrt{\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}}{\sqrt{\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}+\sqrt{\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}}\,dx$$

$$\left[\therefore \int_0^a f(x)\,dx = \int_0^a (a-x)\,dx\right]$$

$$= \int_0^{\pi/2} \frac{\sqrt{\cos x}}{\sqrt{\cos x}+\sqrt{\sin x}}\,dx \qquad ....(2)$$

समी. (1) और (2) को जोड़ने पर 2 अंक

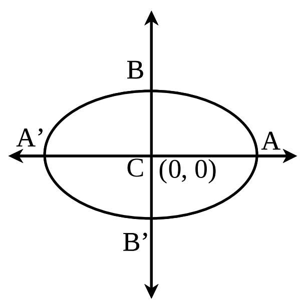
$$I+I = \int_0^{\pi/2} \left[\frac{\sqrt{\sin x}}{\sqrt{\sin x}+\sqrt{\cos x}} + \frac{\sqrt{\cos x}}{\sqrt{\cos x}+\sqrt{\sin x}}\right] dx$$

$$2I = \int_0^{\pi/2} \frac{\sqrt{\sin x}+\sqrt{\cos x}}{\sqrt{\sin x}+\sqrt{\cos x}}\,dx$$ 2 अंक

$$2I = \int_0^{\pi/2} dx = [x]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2} - 0 = \frac{\pi}{2}$$ 1 अंक

अथवा

दीर्घ वृत्त का समीकरण



1 अंक

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$ 1 अंक

$\Rightarrow$ $$\frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{x^2}{a^2}$$

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}\,(a^2 - x^2)$$

$$y = \frac{b}{a}\ \sqrt{a^2 - x^2}$$ 1 अंक

अभीष्ट क्षेत्रफल $= 4 \times CAB$ का क्षेत्रफल

$$= 4 \int_0^a \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}\ dx$$

$$= \frac{4b}{a}\left[\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2}\sin^{-1}\frac{x}{a}\right]_0^a$$

$$= \frac{4b}{a}\left(\frac{a}{2}\sqrt{a^2-a^2} + \frac{a^2}{2}\sin^{-1}\frac{a}{a}\right) - \left(0 + \frac{a^2}{2}\sin^{-1}0\right)$$

$$= \frac{4b}{a}\left[0 + \frac{a^2}{2} \times \sin^{-1}1 - (0+0)\right]$$

$$= \frac{4b}{a} \times \frac{a^2}{2} \times \frac{\pi}{2} = \pi ab$$ 2 अंक

प्र. 21

$$(1 + x^2)\frac{dy}{dx} + 2xy = 4x^2$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} + \frac{2x}{1+x^2}y = \frac{4x^2}{1+x^2} \qquad ....(1)$$

समी. (1) की तुलना $\frac{dy}{dx} + Py = Q$ से करने पर

$$P = \frac{2x}{1+x^2},\ Q = \frac{4x^2}{1+x^2}$$ 1 अंक

$$I.F. =$$

$$= e^{\int \frac{2x}{1+x^2}dx}$$ 1 अंक

माना $1 + x^2 \Rightarrow 2xdx = dt$

$$= e^{\int \frac{dt}{d}}$$

$$= e^{\log t = t}$$

$$I.F. = 1 + x^2$$ 2 अंक

समीकरण का हल होगा।

$$y\ I.F. = \int I.F. \times Qdx$$

$$\Rightarrow \quad y\,(1 + x^2) = \int (1 + x^2) \cdot \frac{4x^2}{1+x^2}dx$$

$$\Rightarrow \quad y\,(1 + x^2) = \int 4x^2\, dx$$

$$\Rightarrow \qquad y(1+x^2) = \frac{4x^3}{3} + C$$ 2 अंक

अथवा **(OR)**

हलः दिया गया अवकल समीकरण

$$\cos^3 x \frac{dy}{dx} + y \cos x = \sin x$$

$$\frac{dy}{dx} + y \times \frac{1}{\cos^2 x} = \frac{\sin x}{\cos^3 x}$$

$$\frac{dy}{dx} + \sec^2 xy = \tan x \sec^2 x$$ 1 अंक

इस समीकरण की तुलना

$\frac{dy}{dx} + py = Q$ से करने पर 1 अंक

$$P = \sec^2 x \; Q = \tan \theta . \sec^2 x$$

$$\text{I.F} = e^{\int pdx}$$

$$\text{I.F} = e^{\int \sec^2 x \, dx}$$

$$\text{I.F} = e^{\tan x}$$ 1 अंक

समीकरण का हल होगा–

$$y . \text{I.F} = \int IF \times \theta \, dx$$

$$y \, e^{\int \tan x} = \int e^{\tan x} . \tan x . \sec x \, dx$$

$\tan x = $ t रखने पर

$$\frac{d}{dx} \tan x = \frac{dt}{dx}$$

$$\sec^2 x \, dx = dt$$

$$y . e^{\tan x} = \int e^t \times t \, dt$$

$$y . e^{\tan x} = t \int e^t \, dt - \int \left[\frac{d}{dt} t \int e^t dt \right] dt$$

$$y . e^{\tan x} = t . e^t - \int e^t \, dt$$

$$y . e^{\tan x} = t . e^t - e^t + C$$

$$y . e^{\tan x} = \tan x . e^{\tan x} - e^{\tan x} + C$$ 2 अंक

$$y . e^{\tan x} = e^{\tan x} (\tan x - 1) + C$$

$$y = (\tan x - 1) + C\, e^{-\tan x}$$

हल:22 माना प्रतिदर्श समष्टि s है

तब $n(s) = 36$

पहले पाँसे पर विषम संख्या आने की घटना

A = {(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6), (3, 1), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (3, 5), (3, 6), (5, 1), (5, 2), (5, 3), (5, 4), (5, 5), (5, 6)}

$$n(A) = 18$$ 1 अंक

विषम संख्या आने की प्रायिकता

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(s)}$$

$$P(A) = \frac{18}{36}$$ 1 अंक

संख्याओं का योग 9 आने की घटना

$$B = \{(3, 6), (6, 3), (4, 5)\ (5, 4)\}$$

$$n(B) = 4$$

संख्याओं का योग 9 प्राप्त करने की प्रायिकता

$$P(B) = \frac{n(B)}{n(s)} = \frac{4}{36}$$ 1 अंक

उभयनिष्ट घटनाएँ $A \cap B = \{(3, 6), (5, 4)\}$

$$n(A \cap B) = 2$$

$$P(A \cap B) = \frac{n(A \cap B)}{n(s)} = \frac{2}{36}$$

अभीष्ट प्रायिकता

$$P(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$$

$$= \frac{18}{36} + \frac{4}{36} - \frac{2}{36} = \frac{18+4-2}{36} = \frac{20}{36} = \frac{5}{9}$$ 2 अंक

अथवा **(OR)**

हल: सिक्के को एक बार उछालने पर शीर्ष प्राप्त करने की प्रायिकता

$$p(A) = \frac{1}{2}$$

शीर्ष प्राप्त न करने की प्रायिकता

$$p(\bar{A}) = 1 - p(A)$$

$$= 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$ 1 अंक

$$p(x = 0) = 0$$

(कोई शीर्ष नहीं)

$$= p(\text{A})\ p(\overline{A})$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$ 1 अंक

$$p(x = 1) = p$$

(एक शीर्ष)

$$= p(A)\ \ p(\overline{A}) + p(\overline{A})\ p(A)$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4} \times \frac{1}{4}$$

$$= \frac{\cancel{2}}{\cancel{4}} = \frac{1}{2}$$

$$p(x = 2) = p$$

(दो शीर्ष)

$$= p(A) + p(A) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$ 2 अंक

शीर्ष की संख्या का प्रायिकता बटन निम्न होगा

x_i	0	1	2
p_i	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

1 अंक

हल:23 गोले का समीकरण है–

$$x^2 + y^2 + z^2 - 3x - 2y + 2z - 15 = 0 \quad ....(1)$$

समीकरण 1 की तुलना

$x^2 + y^2 + z^2 + 2ax + 2ay + 2wz + d = 0$ से करने पर

$$2u = -3,\ 2v = -2,\ 2w = 2,\ d = -15$$

$$u = \frac{-3}{2},\ v = -1,\ w = 1,\ d = -15$$ 2 अंक

$$u = \frac{3}{2},\ -v = 1,\ -w = -1,\ d = -15$$

गोले का केन्द्र

$$(-u,\ -v,\ -w)=\left(\frac{-3}{2},1,-1\right)$$ 1 अंक

A के निर्देशांक $(x_1, y_1, z_1) = (-1, 4, -3)$ है,

मानाकि B सिरे के निर्देशांक (x_2, y_2, z_2) है,

तब $$x=\frac{x_1+x_2}{2},\ y=\frac{y_1+y_2}{2},\ z=\frac{z_1+z_2}{2}$$

$$\frac{-3}{2}=\frac{-1+x_2}{2},\ 1=\frac{4+y_2}{2},\ -1=\frac{-3+z_2}{2}$$

$$x_2-1=3,\ y_2+4=2,\ z_2-3=-2$$

$$x_2=4,\ y_2=-2,\ z_2=1$$ 2 अंक

उत्तर– B सिरे के निर्देशांक $(4, -2, 1)$ होंगे, 1 अंक

अथवा **(OR)**

हल: दी गई रेखाओं के समीकरण है–

$$\frac{x+1}{3}=\frac{y+3}{5}=\frac{z+5}{7}\ ....(1)$$

$$\frac{x-2}{1}=\frac{y-4}{3}=\frac{z-6}{5}\ ....(2)$$

यहाँ $$x_1=-1,\ y_1=-3,\ z_1=-5$$
$$l_1=3,\ m_1=5,\ n_1=7$$
$$x_2=2,\ y_2=4,\ z_2=6$$
$$l_2=+1,\ m_2=3,\ n_2=5$$

$$\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 2+1 & 4+3 & 6+5 \\ 3 & 5 & 7 \\ 1 & 3 & 5 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 3 & 7 & 11 \\ 3 & 5 & 7 \\ 1 & 3 & 5 \end{vmatrix}$$ 2 अंक

R_1 के सापेक्ष विस्तार करने पर

$$=3(25-21)-7(15-7)+11\ (9-5)$$
$$=3\times 4-7\times 8+11\times 4$$
$$=12-56+44=0$$ 1 अंक

अतः रेखाएँ परस्पर प्रतिच्छेद करती है

रेखा (1) पर स्थित बिन्दु

$$\frac{x+1}{3}=\frac{y+3}{5}=\frac{z+5}{7}=r_1$$

अर्थात् $x = 3r_1 - 1,\ y = 5r_1 - 3,\ z = 7r_1 - 5$

रेखा (2) पर स्थित कोई बिन्दु

$$\frac{x-2}{1} = \frac{y-4}{3} = \frac{z-6}{5} = r_2$$ 1 अंक

$x = r_2 + 2,\ y = 3r_2 + 4,\ z = 5r_2 + 6$

प्रतिच्छेद बिन्दु के लिए

$3r_1 - 1 = r_2 + 2,\ 5r_1 - 3 = 3r_2 + 4,\ 7r_1 - 5 = 5r_2 + 6$

$3r_1 - r_2 = 3,\ 5r_1 - 3r_2 = 7,\ 7r_1 - 5r_2 = 11$

$3r_1 - r_2 = 3,\ 3r_1 - r_2 - 3 = 0$

$5r_1 - 3r_2 = 7,\ 5r_1 - 3r_2 - 7 = 0$

बज्र गुणनखंड विधि से हल करने पर

$$\frac{r_1}{7-9} = \frac{r_2}{-15+21} = \frac{-1}{-9+5}$$

$$\frac{r_1}{-2} = \frac{r_2}{6} = \frac{1}{-4}$$

$$r_1 = \frac{1}{2},\ r_2 = -\frac{3}{2}$$

अतः r_1 का मान प्रतिच्छेद बिन्दुओं में रखने पर

$x = 3r_1 - 1 \quad y = 5r_1 - 3 \quad z = 7r_1 - 5$

$\Rightarrow \quad 3 \times \frac{1}{2} - 1 = 5 \times \frac{1}{2} - 3 = 7 \times \frac{1}{2} - 5$

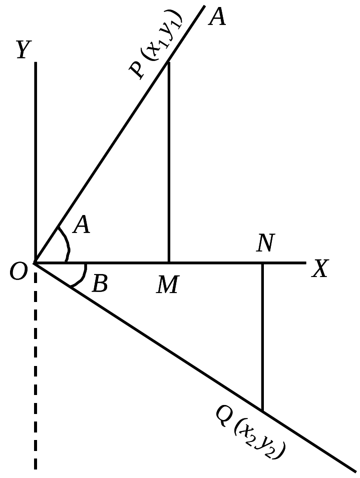
$\Rightarrow \quad \frac{3}{2} - 1 = \frac{5}{2} - 3 = \frac{7}{2} - 5$

$\Rightarrow \quad \frac{3-2}{2} = \frac{5-6}{2} = \frac{7-10}{2}$

$\Rightarrow \quad \frac{1}{2} = -\frac{1}{2} = -\frac{3}{2}$

उत्तर– अतः प्रतिच्छेद बिन्दु के निर्देशांक $(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{3}{2})$ होंगे। **2** अंक

हल:24 माना OX के अनुदिश मात्रक सदिश $\hat{i}$ तथा OY के अनुदिश मात्रक सदिश $\hat{j}$ है।



1 अंक

माना $\angle AOX = \angle A \quad \angle BOX = \angle B$

$$\angle AOB = \angle A + \angle B$$

OA पर बिन्दु $P(x_1, y_1)$ इस प्रकार लिया गया कि

$|\overrightarrow{OP}| = 1$ बिन्दु P से OX पर लम्ब PM है

$$\overrightarrow{OM} = x_1, \ \overrightarrow{MP} = y_1$$

$$\overrightarrow{OM} = \hat{i}\, x_1, \ \overrightarrow{MP} = \hat{j}\, y_1$$ **1** अंक

ΔOPM में,

$\Rightarrow$ $$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MP}$$

$$= \hat{i}\, x_1 + \hat{j}\, y_1$$

$$\cos A = \frac{OM}{OP} = \frac{x_1}{1}, \quad x_1 = \cos A$$

$$\sin A = \frac{MP}{OP} = \frac{y_1}{1}, \quad y_1 = \sin A$$

$\Rightarrow$ $$\overrightarrow{OP} = \hat{i} \cos A + \hat{j} \sin A$$ **1** अंक

OB पर बिन्दु $Q(x_2, y_2)$ इस प्रकार है कि

$|\overrightarrow{OQ}| = 1$ बिन्दु Q से OX पर लम्ब QN है

$$\overrightarrow{ON} = x_2, \ \overrightarrow{NQ} = -y_2$$

$\Rightarrow$ $$\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{ON} + NQ$$

$$\overrightarrow{OQ} = x_2 + y_2$$

$$\overrightarrow{OQ} = ix_2 + jy_2$$

$$\cos B = \frac{ON}{OQ} = \frac{x_2}{1}, \quad \sin B = \frac{NQ}{OQ} = \frac{-y_2}{1}$$ **1** अंक

$$x_2 = \cos B,\ y_2 = -\sin A$$

तब $$\overrightarrow{OQ} = \hat{i}\cos B - \hat{j}\sin B$$

$\Rightarrow$ $$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ} = (\hat{i}\cos A + \hat{j}\sin A)(\hat{i}\cos B - \hat{j}\sin B)$$

$\Rightarrow$ $$|\overrightarrow{OP}|\cdot|\overrightarrow{OQ}|\cos(A+B) = \cos A\cos B - \sin A\sin B$$

$\therefore$ $$\hat{i}^2 = \hat{j}^2 = 1$$

$\Rightarrow$ $$|x| \times \cos(A+B) = \cos A\cos B - \sin A\sin B$$

$\Rightarrow$ $$\cos(A+B) = \cos A\cos B - \sin A\sin B$$ **2** अंक

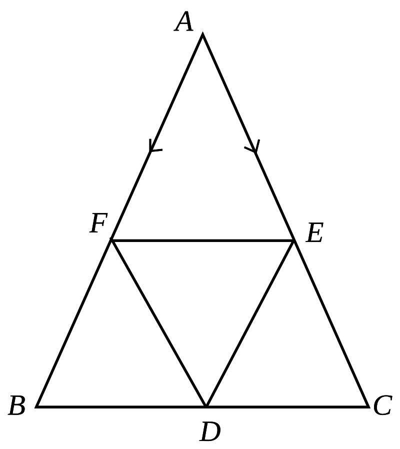
सिद्ध हुआ।

अथवा **(OR)**

हल: दिया है– ΔABC की भुजाओं BC, CA व AB के मध्य बिन्दु क्रमशः D, E व F है, शीर्ष A को मूल बिन्दु मानकर शीर्ष B व C के स्थिति सदिश क्रमशः $\vec{b}$ व $\vec{c}$ है।

तब, $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{c}$

मध्य बिन्दु D, E व F के स्थिति सदिश क्रमशः $\frac{\vec{b}+\vec{c}}{2}, \frac{\vec{c}}{2}, \frac{\vec{b}}{2}$ होंगे।



2 अंक

ΔABC का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|$

$= \frac{1}{2}|\vec{b}\times\vec{c}|$ ....(1)

ΔDEF का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2}|\overrightarrow{DE}\times\overrightarrow{DF}|$ ....(2)

$\therefore \overrightarrow{DE}$ = E की स्थिति $- D$ का स्थिति सदिश

$$= \frac{C}{2} - \left(\frac{\vec{b}\times\vec{c}}{2}\right)$$

$$\overrightarrow{DE} = \frac{\vec{c}-\vec{b}-\vec{c}}{2} = \frac{-\vec{b}}{2}$$

तथा $\overrightarrow{DF}$ = $\vec{F}$ का स्थिति सदिश $- D$ का स्थिति सदिश

$$\overrightarrow{DF} = \frac{\vec{b}}{2} - \left(\frac{\vec{b}\times\vec{c}}{2}\right)$$

$$= \frac{\cancel{\vec{b}} - \cancel{\vec{b}} - \vec{c}}{2}$$

$$= -\frac{\vec{c}}{2}$$ **2** अंक

ΔDEF का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2}\left|\frac{-\vec{b}}{2}\times\frac{-\vec{c}}{2}\right|$

$$= \frac{1}{2}\left|\frac{\vec{b}}{2} \times \frac{\vec{c}}{2}\right|$$

$$= \frac{1}{4}\left|\frac{1}{2}\vec{b} \times \vec{c}\right|$$

$$= \frac{1}{4} \times \frac{1}{2}\left|\vec{b} \times \vec{c}\right|$$

$= \frac{1}{4}$ ΔABC का क्षेत्रफल

[समी. (1) से]

यही सिद्ध करना था। **2** अंक